

Sistemas Dinámicos no Lineales



Diana Marcela López Valencia

Sistemas Dinámicos no Lineales

Diana Marcela López Valencia

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de
Ingeniera Electricista

Pereira, Marzo de 2019
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Programa de Ingeniería Eléctrica.



Sistemas Dinámicos no Lineales

©Diana Marcela López Valencia

Director: MsC. Carlos Alberto Ramirez Vanegas

Pereira, Marzo de 2019

Programa de Ingeniería Eléctrica.

Universidad Tecnológica de Pereira

La Julita. Pereira(Colombia)

TEL: (+57)(6)3137122

www.utp.edu.co

Versión web disponible en: *<http://recursosbiblioteca.utp.edu.co/tesisd/index.html>*

Agradecimientos

A Dios por darme la oportunidad de vivir, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón para continuar cuando he estado a punto de caer.

Agradezco también a Dios por colocar personas maravillosas en mi camino, que han sido mi soporte y compañía durante esta etapa de mi vida.

Agradezco sobre todo a ese ser de luz, que hace que mis días sean maravillosos, por creer en mí, gracias por ser mi cómplice, confidente, amiga, por ayudarme a crecer como persona, gracias por nunca cortarme las alas.

Este logro te lo dedico a ti madre mía, porque mi corazón te pertenece y porque te amo infinitamente.

Resumen

En el presente trabajo de grado, se describen algunas técnicas de análisis de sistemas dinámicos no lineales, el cual abarca sistemas de primer y segundo orden por medio de la teoría de bifurcación, la cual se centra en el estudio de los cambios en la estructura cualitativa o topológica del comportamiento de un conjunto de ecuaciones.

además se compara la estabilidad de las orbitas periódicas usando la teoría de Lyapunov y Poincaré Bendixson, las cuales permiten describir de forma analítica y cualitativamente el comportamiento de los sistemas dinámicos de diferentes áreas de la ingeniería.

Tabla de Contenido

1	Introducción	1
1.1	Planteamiento del problema	1
1.2	Justificación	2
1.3	Objetivos	3
1.3.1	General	3
1.3.2	Específicos	3
1.4	Estado del arte	4
1.5	Estructura del trabajo de grado	5
2	Fundamentación Teórica.	7
2.1	Análisis cualitativo	7
2.1.1	Flujos en una dimensión	7
2.2	Crecimiento poblacional	10
2.3	Ecuación Logística	11
2.4	Análisis de estabilidad lineal	12
2.5	Flujos en una dimensión	13
2.6	Teorema de existencia y unicidad	13
2.6.1	Teorema de existencia y unicidad	14
2.7	Imposibilidad de oscilaciones	15
2.8	Análogo mecánico	15
2.9	Potenciales	16
3	Bifurcación	19
3.0.1	Cambio en la dinámica del sistema	19
3.0.2	Análisis de estabilidad lineal	21
3.0.3	bifurcación transcítica	24
3.0.4	Bifurcación tenedor (tridente)	26

4	Perla sobre-amortiguada sobre un aro giratorio	29
4.0.1	Flujo en el círculo (S^1)	33
4.0.2	Descartar Órbitas periódicas	41
4.0.3	Método de las nuclinales	43
4.0.4	Teorema de Poincaré - Bendixson	45
4.0.5	Revisión de Bifurcaciones	46
5	Diagramas de Fase	61
5.0.1	Planos de Fase	61
5.1	Extremo de funciones de varias variables	67
5.1.1	Condiciones suficientes de extremo estricto.	68
5.1.2	Método del gradiente	71
5.1.3	Extremo condicionado	71
5.2	Extremo de Funcionales	74
5.2.1	Funcional. Variación de una funcional y sus propiedades	74
5.2.2	Problema elemental del Cálculo variacional. Ecuación de Euler	76
5.2.3	Generalizaciones del problema elemental del Cálculo variacional	77
5.2.4	Invariancia de la ecuación de Euler.	79
5.2.5	Campo de extremales	79
5.2.6	Condiciones suficientes de extremo de una funcional	80
5.3	Condiciones suficiente de extremo fuerte.	81
5.3.1	Extremo condicionado	82
5.3.2	Problemas variacionales con fronteras móviles	83
5.3.3	Problemas discontinuos. Variaciones unilaterales	84
5.3.4	Teoría de Hamilton-Jacobi. Principios variacionales de la Mecánica	84
5.3.5	Método de diferencias finitas de Euler	89
5.3.6	Método de Ritz. Método de Kantoróvich	89
5.3.7	Métodos variacionales para la determinación de los valores y de las funciones propios	90
6	Conclusiones	93
7	Referencias	95

Capítulo 1

Introducción

1.1 Planteamiento del problema

El objetivo del análisis de la evolución temporal de fenómenos naturales o artificiales es el de poder predecir dicha evolución, y en lo posible explicarla. Para realizar esta labor es necesario el empleo de modelos matemáticos mediante el uso de las ecuaciones diferenciales, las cuales permiten describir de forma analítica y cualitativamente el comportamiento de los sistemas dinámicos de diferentes áreas de la ciencia como la mecánica, la medicina, economía, el electromagnetismo, etc. Por esto se dice que “las ecuaciones diferenciales son la piedra angular de las matemáticas aplicadas” [1].

El análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales surge a finales del siglo XIX debido a cuestiones sobre mecánica celeste como el problema de los 3 cuerpos, que el análisis cuantitativo no era capaz de dar una respuesta clara. Los trabajos pioneros fueron realizados por Poincaré, el cual introduce un nuevo punto de vista que hoy día es la base de la topología y la geometría diferencial [2].

El concepto de bifurcación de sistemas dinámicos hace referencia a los cambios que presentan éstos en su estructura cualitativa al modificar uno o varios de sus parámetros de entrada. Así el estudio de las propiedades típicas de los sistemas dinámicos y sus bifurcaciones proporcionan un marco de referencia para los posibles resultados que se esperan de un problema no lineal. El análisis cualitativo se realiza de acuerdo al comportamiento de las trayectorias en el espacio de fase, la cual conforman una familia de soluciones dependiendo de cada una de las condiciones iniciales dadas [3].

Por otra parte, se planea comprobar la existencia o no-existencia de órbitas periódicas mediante el uso de diferentes criterios, estudiando algunos sistemas físicos particulares que presenten dicho fenómeno.

1.2 Justificación

Cuando se desea describir la dinámica que interviene en cualquier fenómeno físico, es decir, conocer la predicción del comportamiento del sistema en un instante futuro de tiempo, es necesario conocer el modelo matemático que describe el sistema lo cual implica el uso de las ecuaciones diferenciales, las cuales dependen de una gran cantidad de parámetros y variables para conseguir un modelo lo suficientemente acertado. Además, cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones diferenciales con un gran dimensionalidad del espacio, estos pueden no responder como se desea haciendo ineficaz trabajar con dicho modelo.

Cuando se presentan estos casos, existe una solución factible al trabajar con los métodos clásicos comprendiendo la dinámica central del sistema y considerar únicamente el conjunto de variables de mayor relevancia. Sin embargo, a pesar de la reducción de dimensionalidad la gran mayoría de estos modelos siguen siendo de gran complejidad al momento de encontrar una solución analítica, ya que su comportamiento asintótico en el espacio de fase va desde converger a un estado en particular (puntos fijos), a un conjunto de estados que se repiten periódicamente (ciclos límites) o hasta presentar estados completamente irregulares que son complejos de describir matemáticamente (atractores extraños) [4].

Por lo tanto, es indispensable conocer cómo abordar dichos sistemas no lineales de forma analítica y cualitativamente, siendo esta última la más usada ya que para diferentes tipos de sistemas solo nos interesa describir cuál es su comportamiento en el espacio de fase en un tiempo futuro.

1.3 Objetivos

1.3.1 General

Estudiar las técnicas de análisis de sistemas dinámicos no lineales.

1.3.2 Específicos

1. Establecer el estado del arte de las técnicas para el análisis de sistemas dinámicos no lineales.
2. Analizar sistemas dinámicos no lineales de primer orden, por medio de la teoría de bifurcación.
3. Estudiar el fenómeno de bifurcación y la presencia de ciclos límites en sistemas dinámicos no lineales de segundo orden.
4. Comparar la estabilidad de orbitas periódicas usando la teoría de Lyapunov y Poincaré Bendixson.

1.4 Estado del arte

Los sistemas dinámicos son aquellos que cambian con el tiempo, los cuales pueden ser explicados por medio de ecuaciones dinámicas y estructuras matemáticas; o bien, pueden ser representados como trayectorias de espacios de fases caracterizados por su capacidad de percibir la evolución del sistema en el tiempo [3].

Dentro de la teoría de los sistemas dinámicos se encuentra un fenómeno muy importante al momento de estudiar la dinámica de un sistema, este fenómeno se conoce como bifurcación, lo cual resulta en súbitas apariciones y desapariciones de atractores estáticos, ya sean periódicos o caóticos, y son la clase de transformaciones que mantienen los sistemas en evolución y que incluyen diferentes tipos de sistemas físicos [4].

Los sistemas dinámicos pueden ser utilizados para seguir trayectorias de corto plazo, y se puede extraer además información de largo plazo sobre el comportamiento general de las trayectorias, según sus giros en torno a los atractores. Por lo tanto, los modelos caóticos (que tienen regímenes caóticos, para al menos algunos valores de los parámetros) pueden presentar situaciones deseables en los sistemas predictivos (Smith, 1998) [5].

Sin embargo, los avances tecnológicos actuales han generado una enorme variedad de nuevos problemas y aplicaciones que son no lineales en esencia. Por ejemplo, fenómenos no lineales tales como equilibrios múltiples, ciclos límite, bifurcaciones, corrimiento de frecuencias y caos, se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como sistemas de comando de vuelo, manipuladores robot, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de avión, y sistemas de inyección de combustible de alto rendimiento. Tales fenómenos no lineales no se pueden describir mediante dinámica de modelos lineales; una razón necesaria para el uso de modelos no lineales y el desarrollo de conceptos y herramientas de sistemas no lineales de control. [6]

1.5 Estructura del trabajo de grado

El capítulo 1 es la fase de introducción y de contextualización del contenido propuesto y determina el área de trabajo a la que corresponde esta investigación, además contiene los lineamientos y los objetivos trazados de nuestra alternativa de solución ante el planteamiento del problema fundamental.

En el capítulo 1 también se tiene el estado del arte establecido, como punto de referencia hacia las metas propuestas.

En el capítulo 2 se presentan los aspectos teóricos que permiten llevar a cabo la totalidad de la investigación.

Posteriormente en el capítulo 3 se muestran las conclusiones de las metodologías propuestas.

Capítulo 2

Fundamentación Teórica.

2.1 Análisis cualitativo

2.1.1 Flujos en una dimensión

introducimos el sistema general y mencionamos que sus soluciones podrían visualizarse como trayectorias que fluyen a través de un espacio de fase n -dimensional con coordenadas (x_1, \dots, x_n) . Comenzando aquí con el caso simple $n = 1$.

Entonces obtenemos una sola ecuación de la forma Aquí $x(t)$ es una función de valor real del tiempo t , y $f(x)$ es un valor real suave función de x . Llamaremos a tales ecuaciones sistemas unidimensionales o de primer orden. Antes de que haya alguna posibilidad de confusión, prescindamos de dos puntos complicados de terminología:

1. El sistema de palabras se usa aquí en el sentido de un sistema dinámico, no en el sentido clásico de una colección de dos o más ecuaciones. Así Una sola ecuación puede ser un "sistema".

2. No permitimos que f dependa explícitamente del tiempo. Dependiente del tiempo o las ecuaciones "no autónomas" de la forma $\dot{x} = f(x, t)$ son más complicadas, porque se necesitan dos piezas de información, x y t , para predecir El estado futuro del sistema. Por lo tanto, $\dot{x} = f(x, t)$ realmente debería ser considerado como un sistema bidimensional o de segundo orden.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \rightarrow \text{Autonoma} & , x \in \mathbb{R}^n \\ \dot{x} &= f(x, t) \rightarrow \text{No Autonoma}\end{aligned}$$

Sistemas uno-dimensional

$$\dot{x} = f(x) \rightarrow \text{Donde } f(x) \text{ es un campo vectorial}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x \rightarrow \frac{dx}{dt} = \sin x & t = \ln \left(\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x} \right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Suponga $x_0 = \frac{\pi}{4}$ que pasa con la solución $x(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.
2. Qué Pasa con $x(t)$, para una condición inicial x_0 arbitraria.

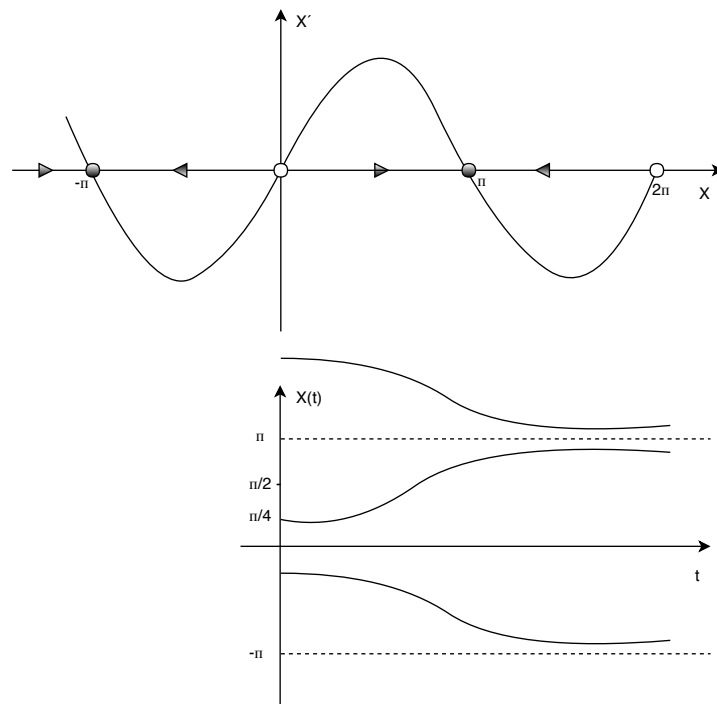


Figura 1.

- si $\dot{x} > 0$ flujo hacia la derecha.
- si $\dot{x} < 0$ flujo hacia la izquierda.
- si $\dot{x} = 0$ se llaman puntos fijos.

la estabilidad de los puntos fijos es:

- \rightarrow estables
- \rightarrow Inestables

Ejemplo:

$$\dot{x} = 1 - x^2 \rightarrow \text{puntos fijos } 1 - x^2 = 0 \quad x = \pm 1$$

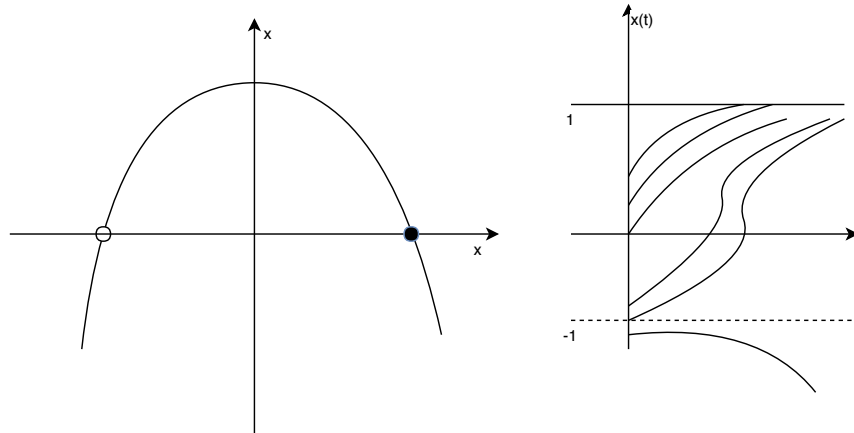


Figura 2.

Ejemplo:

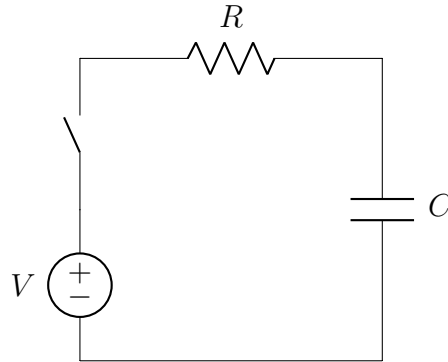


Figure 2.1: circuito RC

$$RI + \frac{Q}{C} = V \quad I = \dot{Q}$$

$$\dot{Q} = \frac{V}{R} - \frac{1}{RC}Q = 0 \quad Q = CV$$

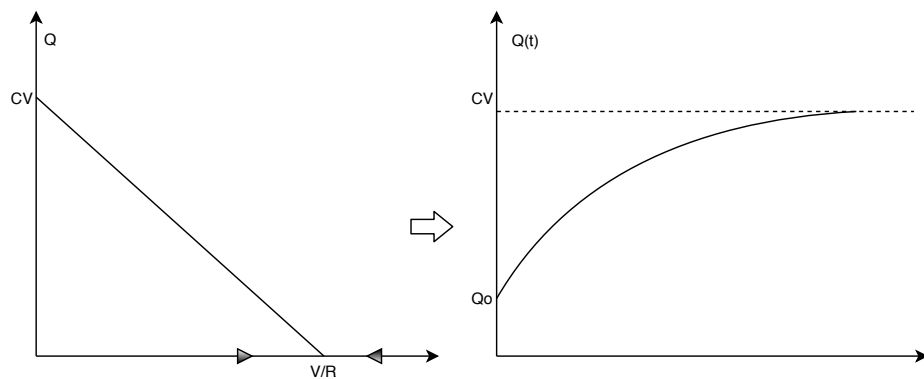


Figura 3.

2.2 Crecimiento poblacional

$N(t)$ = Población

$$\dot{N} = rN \rightarrow N(t) = N_o * e^{rt}$$

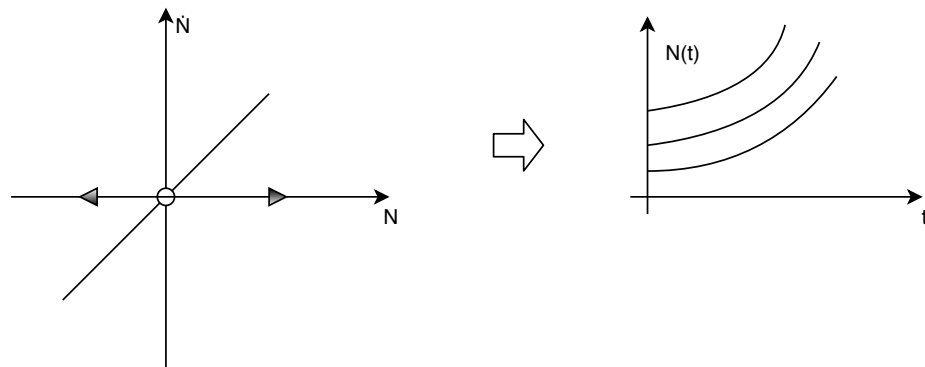


Figura 4.

2.3 Ecuación Logística

$\frac{\dot{N}}{N}$ = Crecimiento per cápita

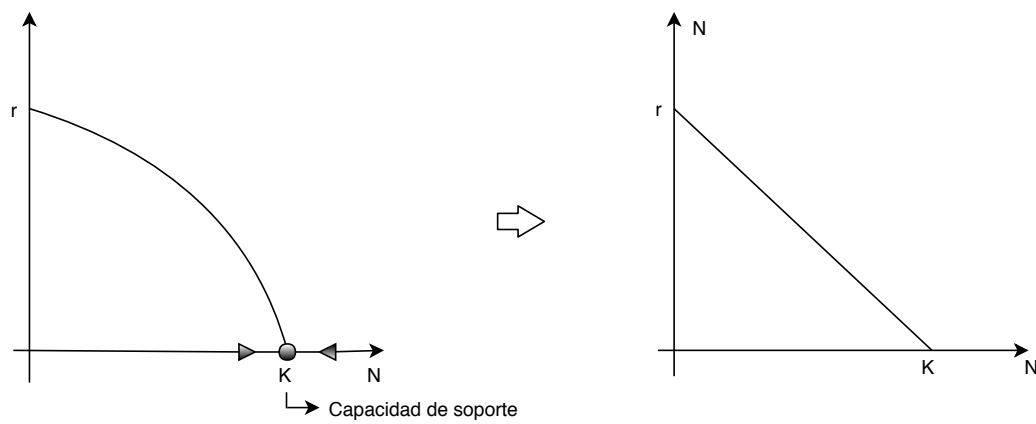


Figura 5.

$$\frac{\dot{N}}{N} = \left(r - \frac{rN}{K} \right) \Rightarrow \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) = 0$$

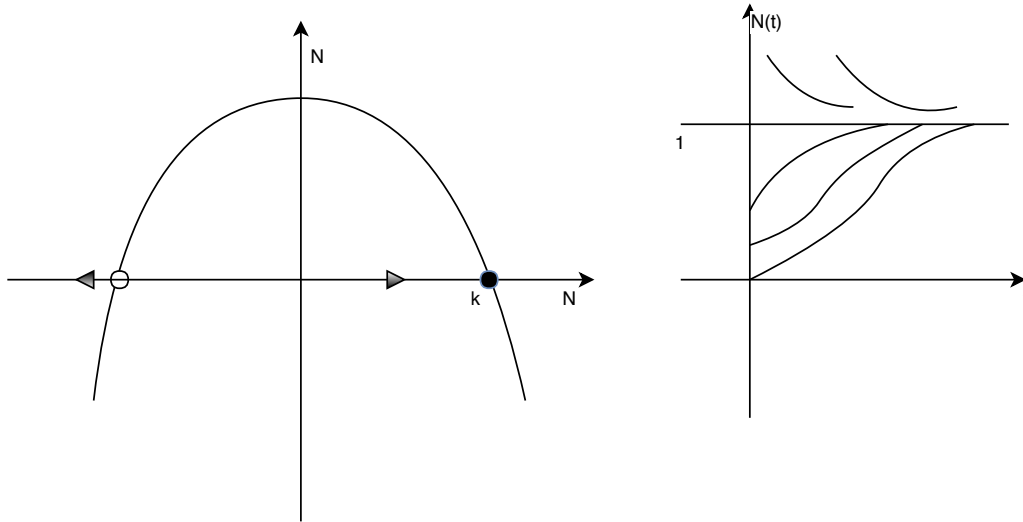


Figura 6.

2.4 Análisis de estabilidad lineal

$\dot{x} = f(x)$; x^* : Solución de equilibrio.

$\eta = x - x^*$; η : Suficientemente pequeño.

$\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(\eta + x^*) \Rightarrow \dot{\eta} = f(x^* + \eta) \rightarrow$ linealizar f alrededor de $\eta = 0$

$$f(n + x^*) \cong f(x^*) + f'(x^*)\eta + O(\eta^2)$$

$$f(n + x^*) \cong f'(x^*)\eta + O(\eta^2)$$

Por lo tanto:

$$\dot{\eta} = f'(x^*)\eta \rightarrow \eta(t) = \eta_0 e^{f'(x^*)t}$$

• $t \rightarrow \infty \wedge f'(x^*) < 0 \Rightarrow \eta(t) \rightarrow 0$ x^* : Linealmente estable

• $t \rightarrow \infty \wedge f'(x^*) > 0 \Rightarrow \eta(t) \rightarrow \infty$ x^* : Linealmente inestable

2.5 Flujos en una dimensión

$$\dot{x} = \sin x \quad x^* = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$f'(x^*) = \cos x^* = \cos(k\pi) = \begin{cases} k \text{ par} & 1 \rightarrow \text{inestable} \\ k \text{ impar} & -1 \rightarrow \text{estable} \end{cases}$$

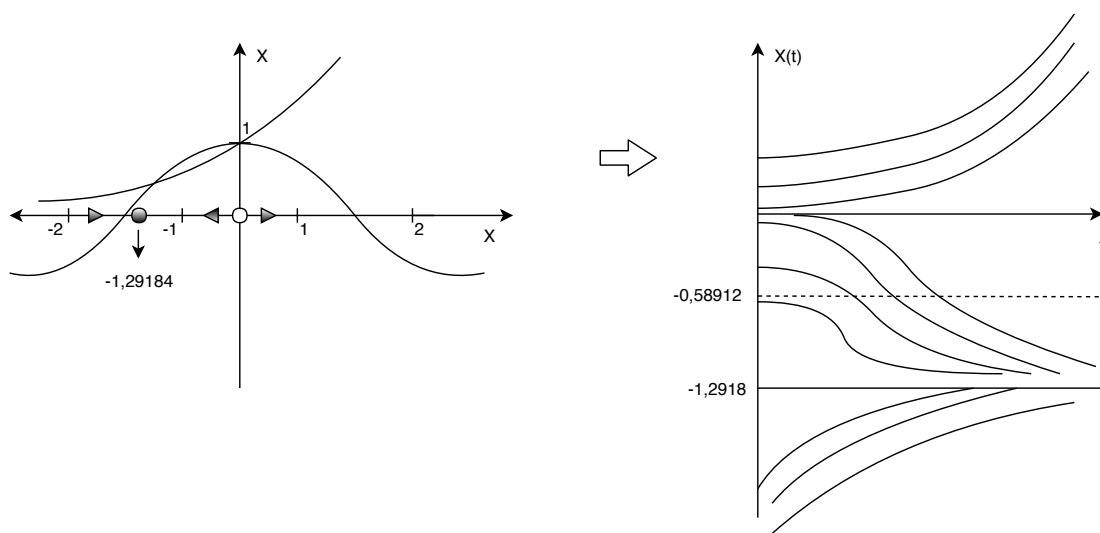


Figura 7.

$$f(x) = e^x - \cos x$$

$$f'(x) = e^x + \sin x = 0 \text{ con } x = -0.58912$$

2.6 Teorema de existencia y unicidad

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{1/3} & \frac{dx}{dt} = x^{1/3} & \frac{3}{2}x(t)^{2/3} = t + c \rightarrow c = 0 \\ x(0) & & x = \left(\frac{2}{3}t\right)^{2/3} \end{cases}$$

$$x(t) = 0 \rightarrow \text{tambi3n es soluci3n}$$

Existen infinitas soluciones:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq k \\ \left[\frac{2}{3}(t-k)\right]^{3/2}, & t > k \end{cases}$$

2.6.1 Teorema de existencia y unicidad

Considere el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (1) \text{ Suponga } f(x) \text{ y } f'(x) \text{ continuas en un intervalo abierto } I \text{ del eje } x. \text{ con } x_o \in I$$

Luego el PVI (1) tiene una solución $x(t)$ en algún intervalo $(-\tau, \tau)$ alrededor de $t = 0$ y la solución es única.

observación: El teorema no garantiza que a solución se pueda extender $\forall t \in \mathbb{R}$

ejemplo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 1 \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad \arctan x = t + c \quad \text{si } x_o = 0 \quad x = \tan x$$

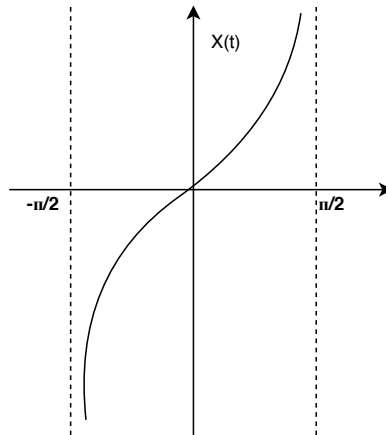


Figura 8.

$\lim_{t \rightarrow \pm\pi/2} x(t) = \pm\infty \rightarrow$ Se conoce como Blow-Up, las soluciones van al infinito en un tiempo finito

Ejercicio:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^{10} \\ x(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{El teorema de existencia y unicidad garantiza que } x(t) \text{ es solución única y existente}$$

¿Será que la solución es extensible a todo \mathbb{R} ?

2.7 Imposibilidad de oscilaciones

- Los puntos dominan en la dinámica.
- Las soluciones van a puntos fijos estables o van a $+\infty$.

$\dot{x} = f(x)$ Vamos a probar que no existen periódicas en una dimensión.

Idea: \rightarrow Suponga que $x(t)$ es una solución periódica no trivial $x(t+T) = x(t)$ para algún $T > 0$ y $x(t) \neq x(t+s) \forall 0 < s < T$.

Derive una contradicción considerando:

$$\int_t^{t+T} f(x) \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$\bullet \int_t^{t+T} (\dot{x}(t))^2 \cdot dt > 0 \quad \bullet \int_{x(t)}^{x(t+T)} f(x) \cdot dx = F(x)|_{x(t)}^{x(t+T)} = F(x(t+T)) - F(x(t))$$

$$= F(x(t)) - F(x(t))$$

$$= 0$$

⏟
Contradicción

2.8 Análogo mecánico

$F(x) = m\ddot{x} + b\dot{x}$ si supongo que $b\dot{x} \gg m\ddot{x}$

Entonces:

$$b\dot{x} = F(x)$$

$$\dot{x} = \frac{1}{b} \cdot F(x)$$

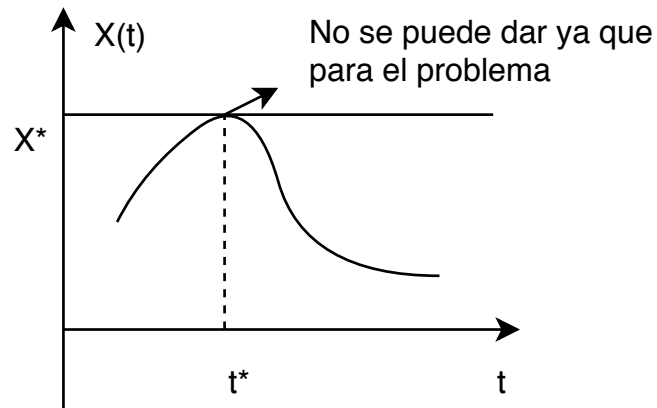


Figura 9.

$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(t^*) = x^* \end{cases} \rightarrow$ Se tendrá dos posibles soluciones lo que contradice el teorema de existencia y unicidad.

2.9 Potenciales

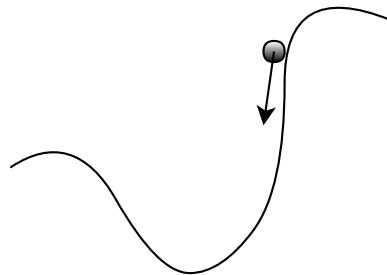


Figura 10.

$$\dot{x} = f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V = V(x(t)) \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dV}{dx} \cdot \left(-\frac{dV}{dx}\right) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

Los mínimos del potencial son puntos fijos estables y los máximos son puntos fijos inestables.

Ejemplo:

$$\bullet \dot{x} = -x \rightarrow -\frac{dV}{dx} = -x \quad V = \frac{1}{2}x^2 + C$$

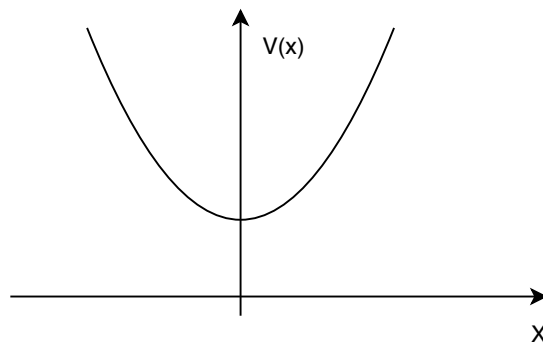


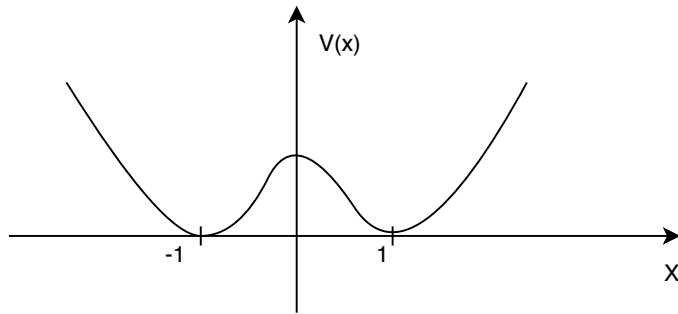
Figura 11.

$$\bullet \dot{x} = x - x^3 \rightarrow -\frac{dV}{dx} = x - x^3 \quad V(x) = \int (x - x^3) \cdot dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$f(x) = x - x^3 = 0$$

$$x(1 - x^2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = \pm 1$$

**Figura 12.**

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow \begin{array}{ll} V''(0) < 0 & \rightarrow \text{inestable} \\ V''(\pm 1) > 0 & \rightarrow \text{estable} \end{array}$$

Capítulo 3

Bifurcación

3.0.1 Cambio en la dinámica del sistema

- La dinámica en una dimensión es pobre.
- Lo interesante es analizar la dependencia de los parámetros.

$\dot{x} = f(x, \mu)$ donde $x \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$, siendo μ la representación de los parámetros.

Bifurcación silla-nodo

Mecanismo en el cual hay aniquilación de puntos fijos.

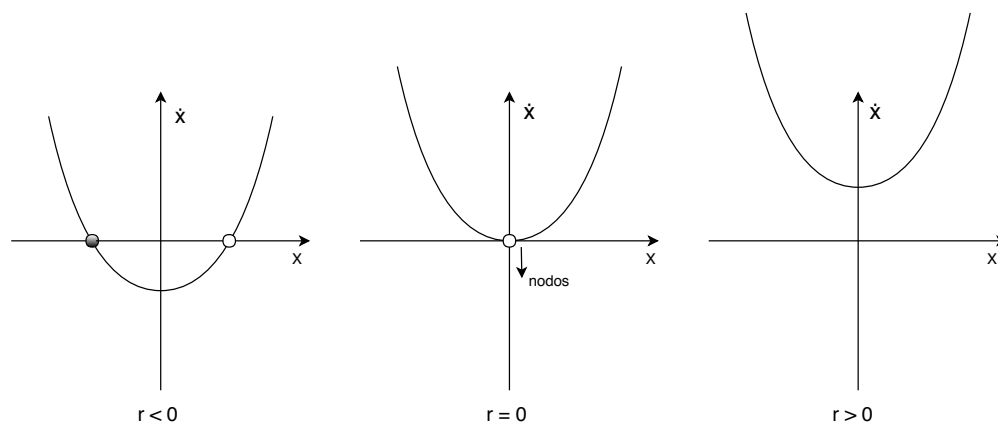


Figura 13.

Punto de bifurcación

Lugar donde ocurre el cambio de la dinámica.

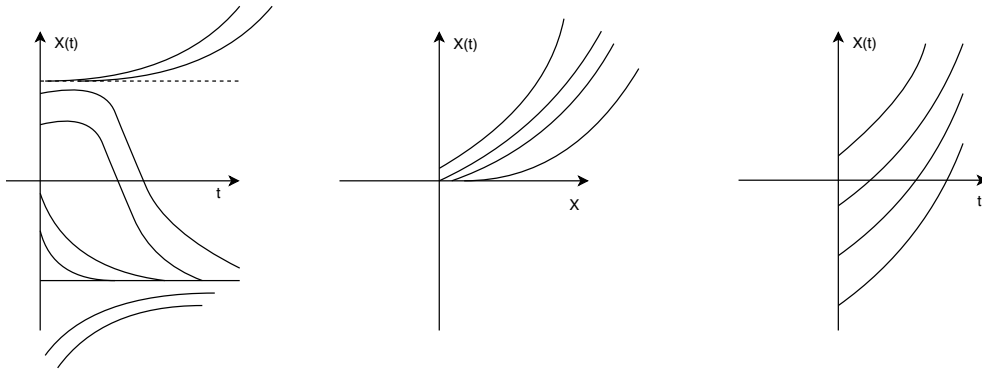


Figura 14.

¿Donde ocurre la bifurcación?

Ocurre en:

- $r = 0$
- $x^* = 0 \rightarrow$ punto de solución.

Convención gráfica

Gráfica de bifurcación

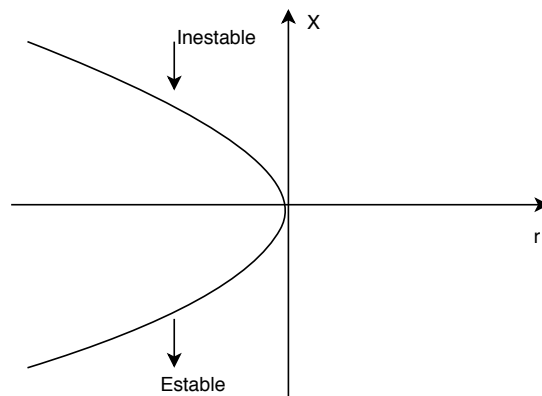


Figura 15.

Ejemplo: $\dot{x} = r - x^2 \rightarrow$ PE $x = \pm\sqrt{r}$

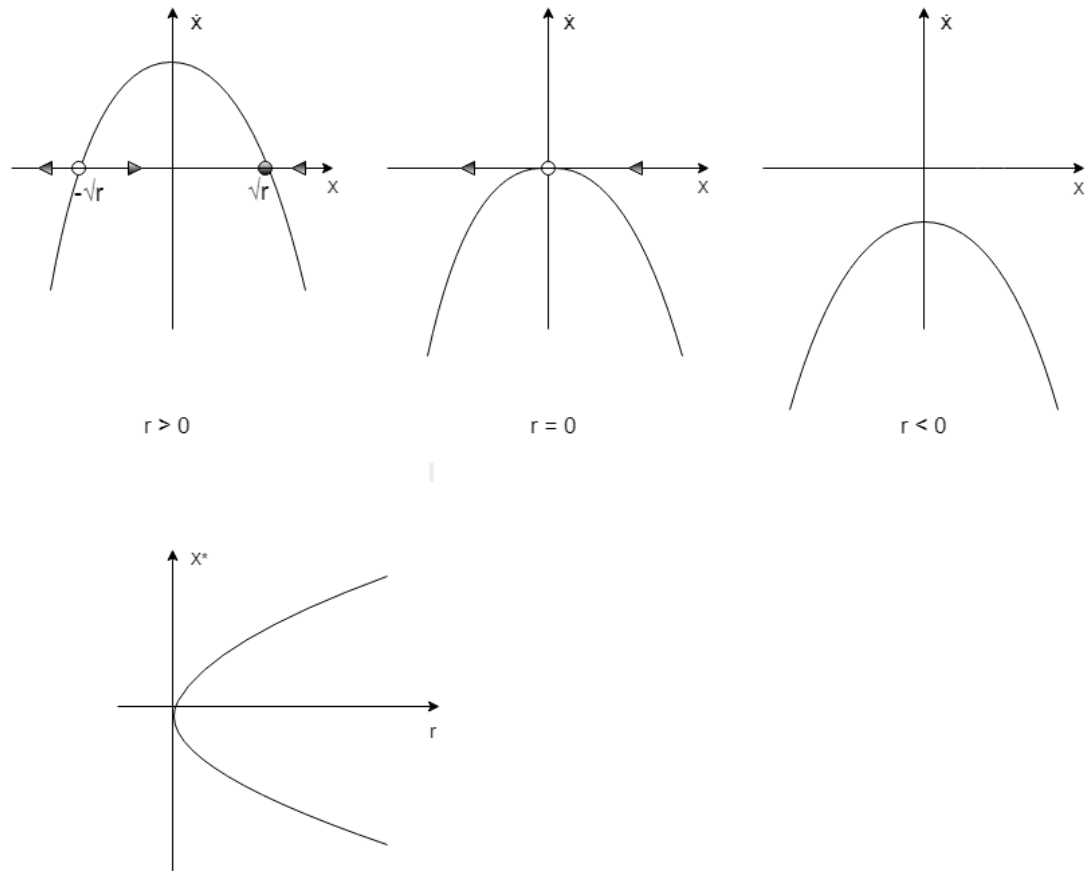


Figura 16.

3.0.2 Análisis de estabilidad lineal

$$x^* = \pm\sqrt{r} \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow \begin{cases} \bullet f'(\sqrt{r}) = -2\sqrt{r} < 0 \rightarrow \text{estable} \\ \bullet f'(-\sqrt{r}) = 2\sqrt{r} > 0 \rightarrow \text{inestable} \end{cases}$$

En resumen, el prototipo para la bifurcación silla-nodo $\dot{x} = r \pm x^2$

Ejemplo: Muestre que $\dot{x} = r - x - e^{-x}$ sufre una bifurcación silla-nodo.

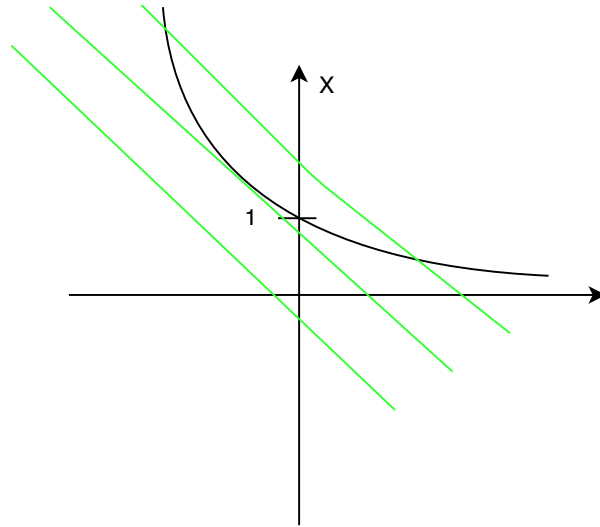


Figura 17.

$$\begin{cases} r - x = e^{-x} \rightarrow & \text{condición para que halla PE} \\ \frac{d}{dx}(r - x) = \frac{d}{dx}(e^{-x}) \rightarrow & \text{condición de tangencia para bifurcación silla-nodo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r - x = e^{-x} \\ 1 = e^{-x} \end{cases} \quad \underbrace{x = 0} \quad \underbrace{r = 1}$$

El punto de bifurcación será $(r, x^*) = (1, 0)$

$$f(x) = r - x - e^{-x}$$

$$f'(x) = -1 + e^{-x} \quad \text{para} \quad \begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow f'(x) < 0 \\ x < 0 &\Rightarrow f'(x) > 0 \end{aligned}$$

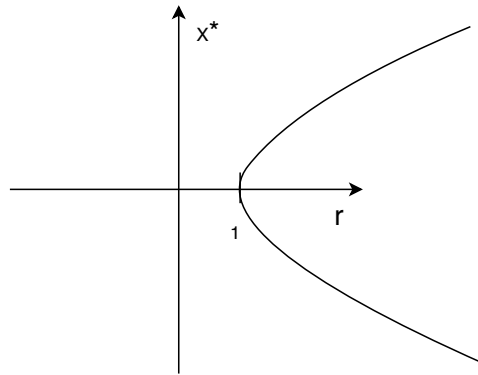


Figura 18.

Que pasa con el campo cerca del punto de bifurcación.

$$\dot{x} = r - x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)$$

$$\dot{x} = r - 1 - \frac{x^2}{2!} + 0(x^3) \quad \text{Despreciando los términos de orden superior.}$$

$$\dot{x} = (r - 1) - \frac{x^2}{2!}$$

$$\dot{x} = R - x^2 \rightarrow \text{Bifurcación silla-nodo.}$$

Sea:

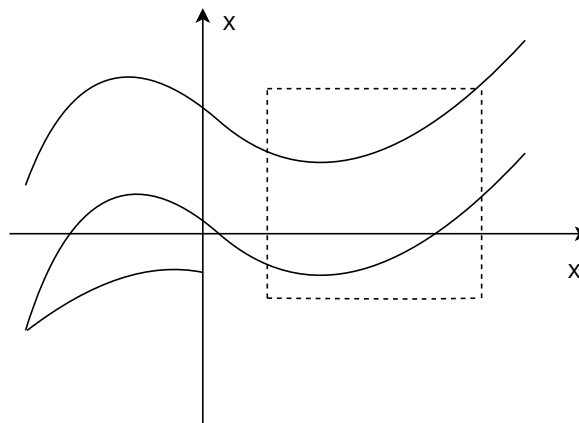


Figura 19.

$f(x)$: Localmente debe ser parecida a una parábola, para que exista bifurcación silla nodo.

Aproximo alrededor del punto de bifurcación $(x^*, r_c) = P^*$

$$\dot{x} = 0f(x^*, r_c) + 0 \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P^*} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{P^*} (r - r_c) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P^*} (x - x^*)^2 + \dots$$

$$\dot{x} = A(r - r_c) + B(x - x^*)^2 + 0(r^2, x^3)$$

$$\text{Donde: } A = \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{P^*}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P^*}$$

Suponiendo un cambio de variable:

$$\dot{x} = (R - R_c) \pm (X - X^*)^2$$

Tarea:

$$(1) \dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$$

$$(2) \dot{x} = r + \frac{1}{2}x - \frac{x}{x+1}$$

Muestre que cada problema sufre una bifurcación silla-nodo. Halle el punto de bifurcación y dibuje el gráfico de bifurcación.

3.0.3 bifurcación transcítica

La forma normal: $\dot{x} = rx - x^2$, La solución de equilibrio $x^* = 0$ permanece para todo r .

$$\dot{x} = x(r - x)$$

$$\underbrace{x^* = 0, \quad x^* = r}$$

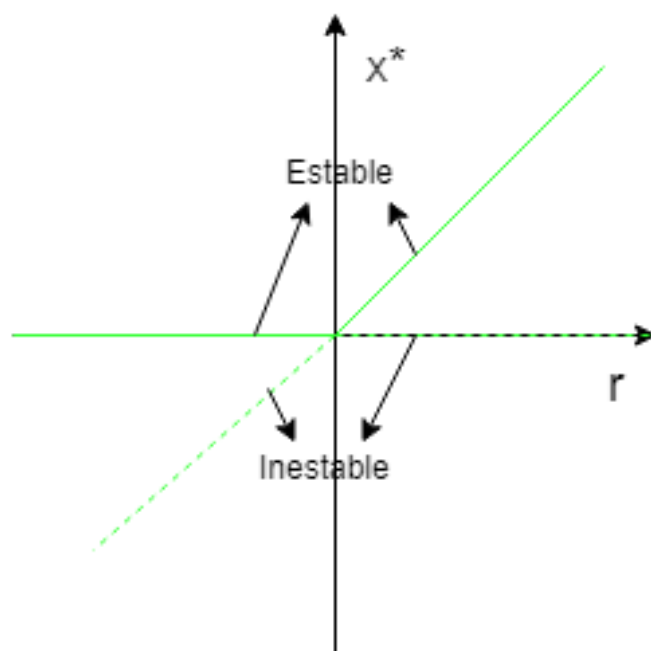


Figura 20.

Gráfico de bifurcación.

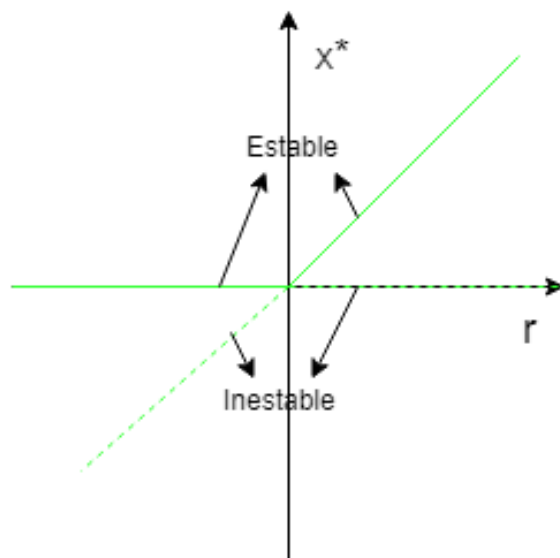


Figura 21.

Ejemplo: Pruebe que el sistema de primer orden $\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$ sufre una bifurcación transcítica en $x = 0$ con $x \ll 1$.

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - a \left(1 - 1 + (bx) - \frac{(bx)^2}{2} + \frac{(bx)^3}{3} \dots \right)$$

$$\dot{x} = x - x^3 - abx + \frac{a(bx)^2}{2} - \frac{a(bx)^3}{3} + \dots$$

$$\dot{x} = (1 - ab) \cdot x + \frac{ab^2}{2} \cdot x^2 + 0(x^3)$$

$$\dot{x} = \frac{ab^2}{2} \left[\frac{2(1 - ab)}{ab^2} x + x^2 \right]$$

3.0.4 Bifurcación tenedor (tridente)

Se presenta en sistemas físicos con algún tipo de simetría.

Forma normal: $\rightarrow \dot{x} = rx - x^3 \rightarrow$ Bifurcación tenedor supercrítica.

Observar: Es invariante bajo el cambio de $x \mapsto (-x)$

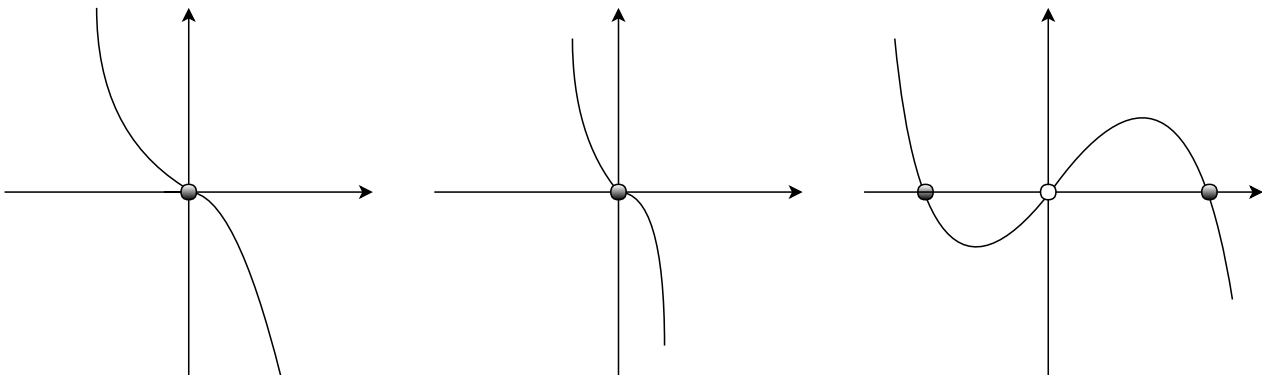
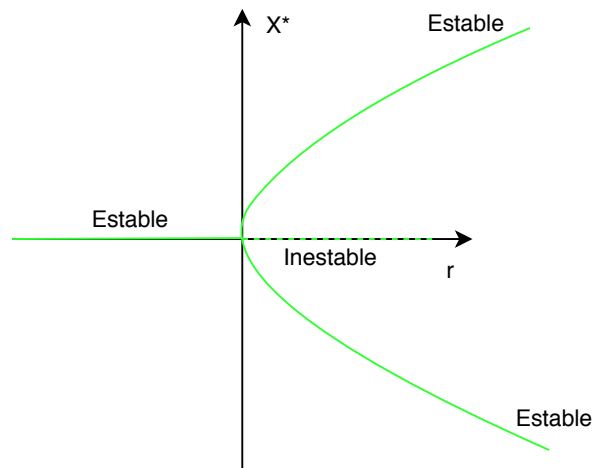


Figura 22.

Bifurcación:**Figura 23.**

Capítulo 4

Perla sobre-amortiguada sobre un aro giratorio

Hasta ahora nos hemos concentrado en la ecuación $\dot{x} = f(x)$, que visualizamos como un vector campo en la línea. Ahora es el momento de considerar un nuevo tipo de ecuación diferencial y su correspondiente espacio de fase. Esta ecuación,

$$\ddot{\theta} = f(\theta) \tag{4.1}$$

corresponde a un campo vectorial en el círculo. Aquí hay un punto en el círculo y es el vector de velocidad en ese punto, determinado por la regla . Al igual que la línea, el círculo es unidimensional, pero tiene una nueva propiedad importante: fluir en una dirección, una partícula puede regresar a su lugar de inicio. Así ¡Las soluciones operacionales se hacen posibles por primera vez en el libro [9]! Para decirlo de otra manera, los campos vectoriales en el círculo son los que más proporcionan un Modelo básico de sistemas que pueden oscilar.

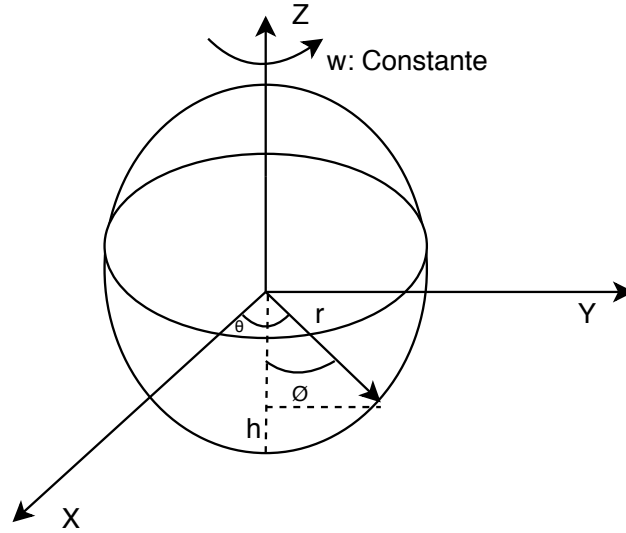


Figura 24.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \phi', \theta, \theta', t)$$

$$\mathcal{L} = E - P \quad \text{donde} \quad E = \frac{1}{2} \cdot mv^2$$

$$P = mgh$$

$$h = r(1 - \cos \phi)$$

$$P = mgh(1 - \cos \phi)$$

$$\vec{x}(t) = \langle r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi \rangle$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}} = r \langle -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi, \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi, -\dot{\phi} \sin \phi \rangle$$

$$v^2 = \|\vec{v}(t)\|^2 = r^2 [(\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi)^2 + (\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi)^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi]$$

$$v^2 = r^2 (\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi)$$

$$v^2 = r^2 (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \phi) \quad \text{donde} \quad \dot{\theta} = w$$

$$v^2 = r^2 (\dot{\phi}^2 + w^2 \sin^2 \phi)$$

El lagrangiano será:

$$\mathcal{L} \left\{ \phi, \dot{\phi} \right\} = \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\phi}^2 + w^2 \sin^2 \phi) - mgr(1 - \cos \phi)$$

Ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \phi} = m r^2 w^2 \sin \phi \cos \phi - mgr \sin \phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} \quad \frac{\partial}{\partial t} (m r^2 \dot{\phi}) = m r^2 \ddot{\phi}$$

$$m r^2 \ddot{\phi} + mgr \sin \phi - m r^2 w^2 \sin \phi \cos \phi = 0 \quad \div \quad m r$$

$$r \ddot{\phi} + g \sin \phi - r w^2 \sin \phi \cos \phi = 0$$

Considerando fricción $b\dot{\phi}$:

$$b\dot{\phi} = m r \omega^2 \sin \phi \cos \phi - mgr \sin \phi$$

$$b\dot{\theta} = m \sin \phi (r \omega^2 \cos \phi - g) = mg \left(\frac{r \omega^2}{g} \cos \phi - 1 \right)$$

Soluciones de equilibrio

$$\sin \phi = 0 \quad \phi_1 = 0 \quad \phi_2 = \pi$$

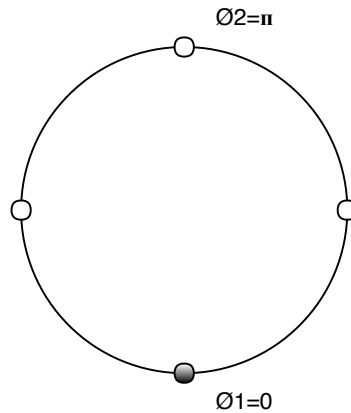


Figura 25.

$$\cos \phi = \frac{g}{r\omega^2} = \frac{1}{\mu} \rightarrow \phi_{3,4} = \arccos\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \omega &\rightarrow \infty \\ \phi &\rightarrow \pm \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$f(\phi) = mg \sin \phi (\mu \cos \phi - 1)$$

$$f'(\phi) = mg \cos \phi (\mu \cos \phi - 1) - \mu mg \sin^2 \phi$$

- $f'(0) = mg(\mu - 1) > 0 \Rightarrow \phi_1^* = 0$ inestable
- $f'(0) = mg(\mu + 1) > 0 \Rightarrow \phi_2^* = 0\pi$ inestable
- $f'(\cos^{-1}(\frac{1}{\mu})) = -\mu mg \sin^2 \phi \Rightarrow \phi_{3,4} \Rightarrow$ estables

Gráfico de bifurcación

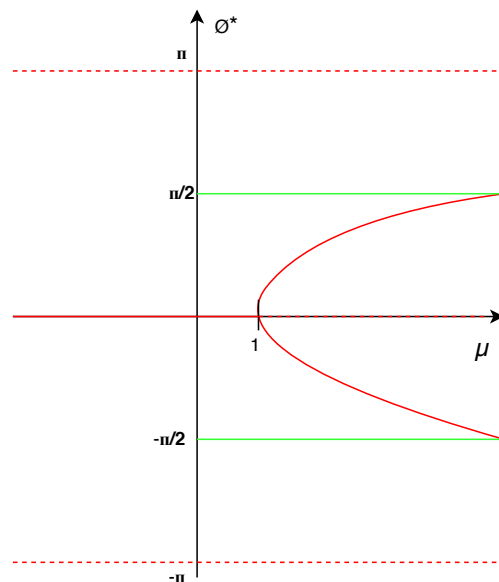


Figura 26.

4.0.1 Flujo en el círculo (S^1)

Hemos trabajado la dinámica de $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, y $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ahora se quiere estudiar:

- $\dot{\theta} = f(\theta)$, f : suave
- θ : Representa un punto sobre S^1
- $\dot{\theta}$: Velocidad angular en el punto θ

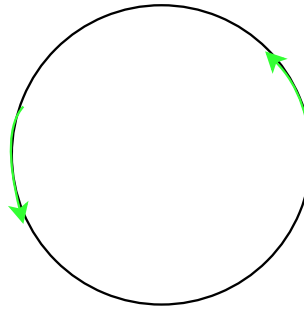


Figura 27.

soluciones estacionarias

$$f(\theta) = 0$$

- En contra de las manecillas del reloj el flujo es positivo.

Ejemplo 1:

$$\dot{\theta} = \sin \theta \quad , \quad \theta^* = 0 \quad , \quad \theta^* = \pi$$

$$S^1 \times \mathbb{R} = \text{cilindro}$$

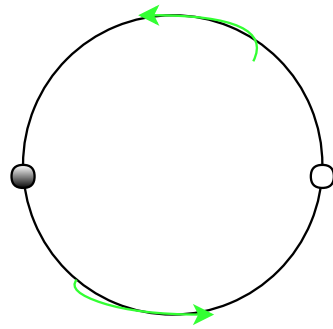


Figura 28.

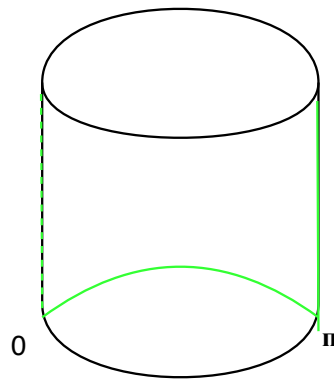


Figura 29.

Ejemplo 2: Argumente por qué $\dot{\theta} = \theta$, no es un flujo en el círculo.

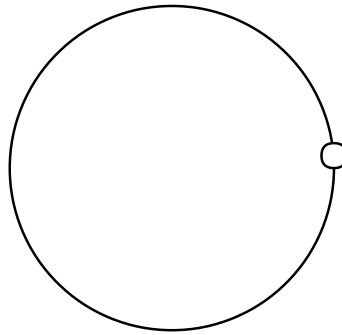


Figura 30.

$$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta = 0, 2\pi, \text{ pero } \left. \begin{array}{l} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\theta} = 2\pi \end{array} \right\} \text{ Las derivadas son diferentes}$$

Una condición para definir flujo en el círculo es que a cada punto sobre el círculo, le corresponde una única velocidad, es decir:

$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi k) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Oscilador uniforme

$$\dot{\theta} = \omega \quad , \quad \omega : \text{constante}$$

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 \rightarrow \text{Es periódica en el sentido que la solución retorna al punto inicial en un tiempo } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

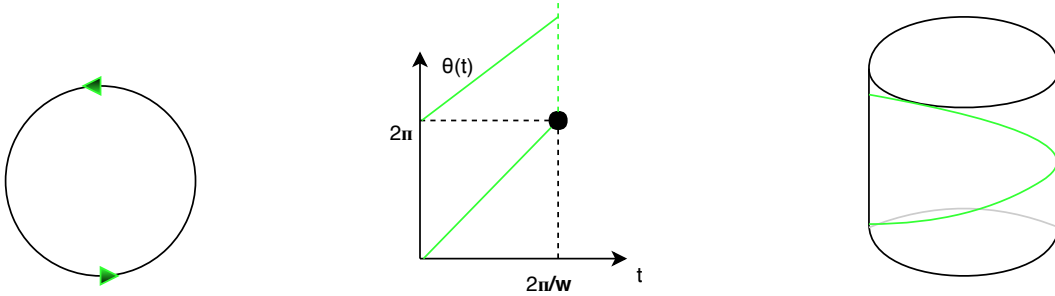


Figura 31.

Ejemplo: Problema de los corredores.

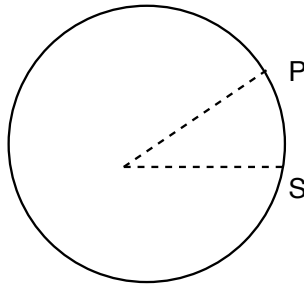


Figura 32.

- P : recorre todo S^1 en un tiempo T_1
- s : recorre todo S^1 en un tiempo T_2

Con $T_2 > T_1$

Si P y s arrancan en un mismo punto θ_0 , en cuanto tiempo s alcanza nuevamente a P .

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow P, \quad \theta_1 : \text{Posición } P$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} \rightarrow s, \quad \theta_2 : \text{Posición } s$$

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow \dot{\phi} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = \bar{\omega}$$

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{2\pi \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)} = \frac{T_2 \cdot T_1}{T_1 - T_2}$$

Oscilador no uniforme

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta \quad a : \text{proporciona no uniformidad}$$

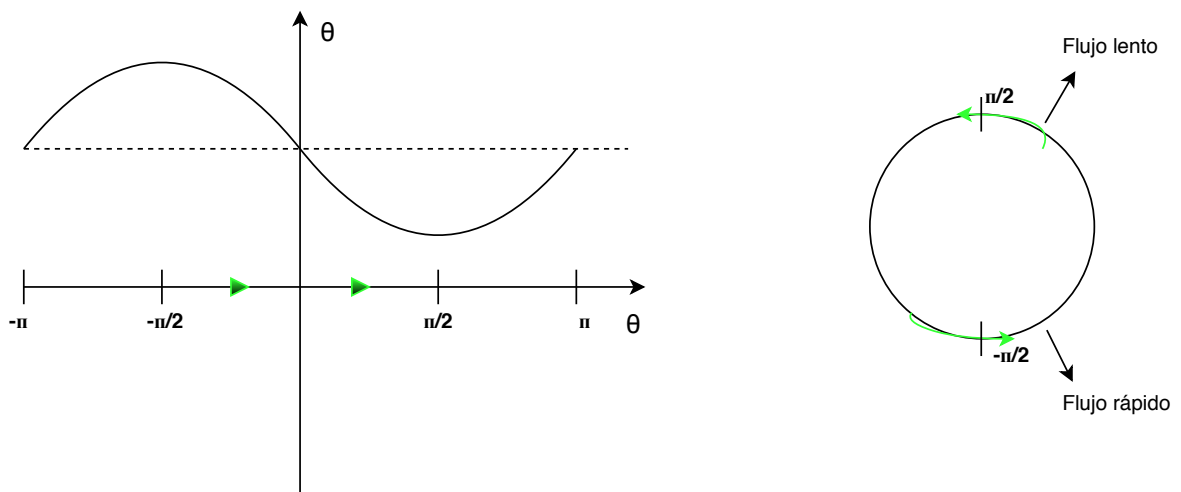
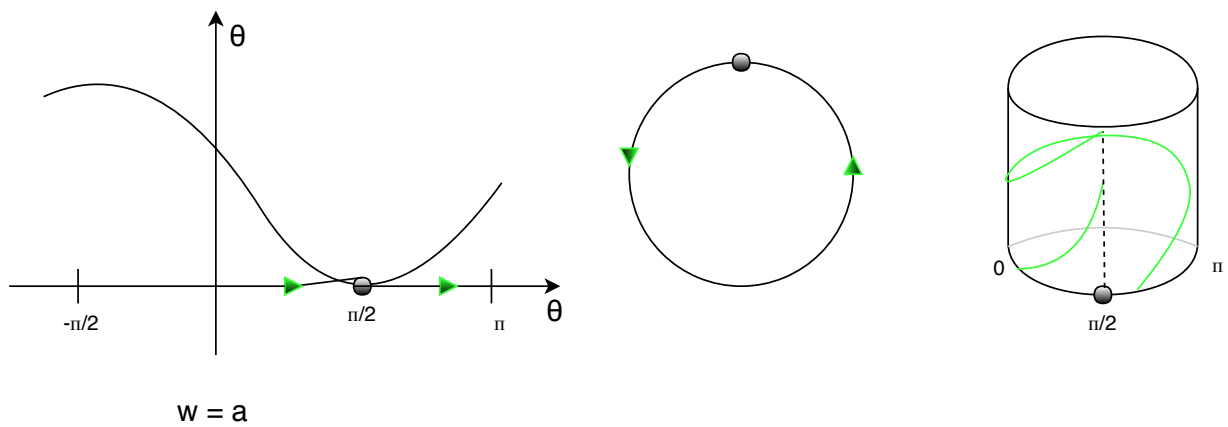


Figura 33.



$$w = a$$

Figura 34.

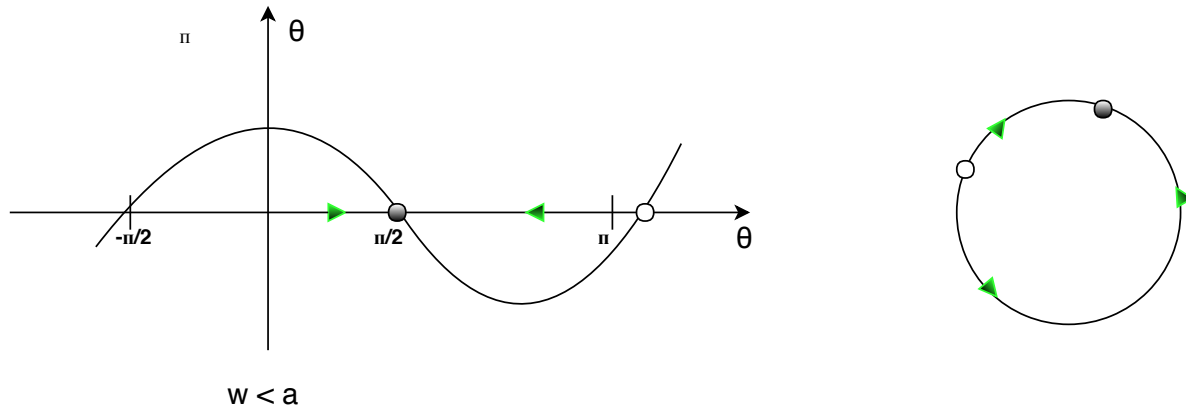


Figura 35.

$$\sin \theta^* = \frac{\omega}{a}$$

$$f'(\theta^*) = -a \cos \theta^*$$

$$\sin^2 \theta^* + \cos^2 \theta^* = 1$$

$$\cos \theta^* = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta^*} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

$$f'(\theta^*) = \mp a \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

Período de Oscilación

$$\frac{d\theta}{dt} = w - a \sin \theta$$

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{w - a \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{w^2 - a^2}}$$

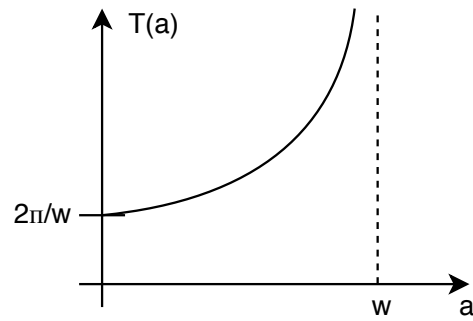


Figura 36.

Se puede estimar el orden de la divergencia:

$$\sqrt{w^2 - a^2} = \sqrt{w + a}\sqrt{w - a}$$

si $w \rightarrow a$

$$\approx \sqrt{2w}\sqrt{w - a} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{2w}\sqrt{w - a}}$$

Tiempo de embotellamiento

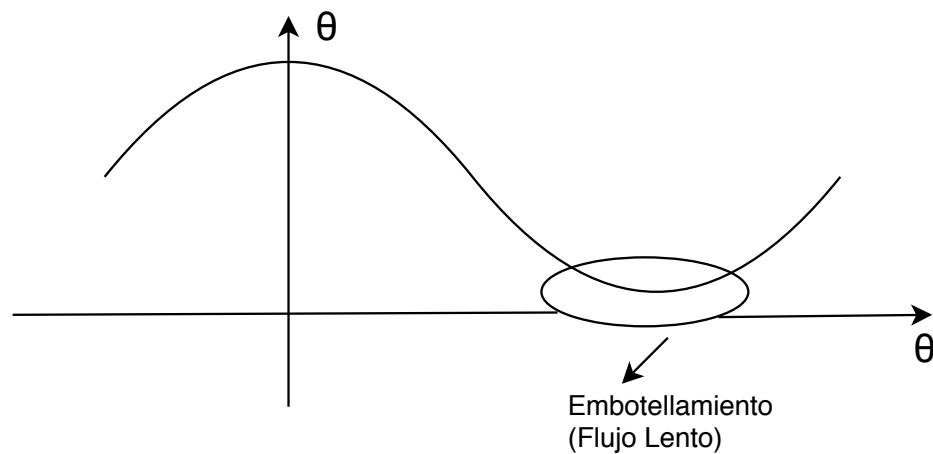


Figura 37.

Se puede comparar con una bifurcación silla nodo $\dot{x} = r + x^2$

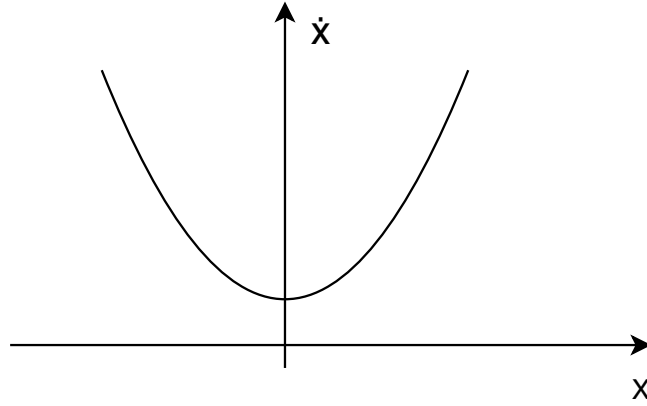


Figura 38.

Si $r > 0$ y $r \approx 0$

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2$$

$$\int_0^T dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{r}}$$

Análisis sistema exacto (embotellamiento alrededor de $\theta = \theta - \frac{\pi}{2}$)

$$\dot{\theta} = w - a \sin \theta \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \phi = \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{\phi} = w - a \cos \phi \approx w - a + \frac{1}{2}a\phi^2 + 0(\phi^3)$$

Para $\phi \ll$

$$\dot{\phi} = w - a + \frac{1}{2}a\phi^2$$

Tomar: $r = w - a$ y $x = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} \phi$

entonces $T_{emb} \approx \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{w}\sqrt{w-a}}$

4.0.2 Descartar Órbitas periódicas

Sistemas gradientes:

Suponga que el sistema puede ser descrito $\dot{x} = -\nabla v(x)$, para algún campo escalar $v(x)$ diferenciable.

Teorema: Las órbitas cerradas son imposibles en sistemas gradientes.

Demostración: supongamos que existe una solución periódica $x(t)$ de periodo T , entonces:

$$\Delta V = V(x(T)) - V(x(0)) = 0$$

$$\Delta V = \int_0^T \frac{dv}{dt} dt = \int_0^T \nabla V \cdot \dot{x} dt$$

$$\text{Ya que } \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' = \nabla V(x', y')$$

$$\Delta V = \int_0^T -\dot{x} \cdot \dot{x} dt$$

$$\Delta V = - \int_0^T \|\dot{x}\|^2 dt \leq 0$$

Para que $\Delta V = 0 \rightarrow x(t)$ debe ser constante, resolviendo para el caso trivial, es decir, $x(t)$ no es constante, entonces:

$\Delta V < 0$ y por el otro lado se tiene que

$\Delta V = 0$ por lo tanto se tiene una contradicción.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = x \cos y \end{cases}, \text{ probar que no tiene una solución periódica}$$

$$\text{Definiendo } V(x, y) = -x \sin y \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -x' = -\sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -y' = -x \cos y$$

Ejercicio 7.2.5

Ejemplo: Muestre que el oscilador $\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$ (1) no tiene soluciones periódicas.

Solución:

Pensemos en $\ddot{x} + x = 0$ el cual tiene energia $E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2)$

• Suponiendo que la ec. (1) tiene soluciones periódicas.

$$\begin{aligned}\Delta E &= 0 = \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \int_0^T (x'x'' + xx') dt = \int_0^T \dot{x}(\ddot{x} + x) dx \\ &= \int_0^T \dot{x}(-\dot{x}^3) dt = - \int_0^T \dot{x}^4 dt \leq 0 \text{ es igual a cero cuando } x(t) \text{ es constante.}\end{aligned}$$

$\Delta E < 0$ por lo tanto no tiene soluciones periódicas.

Funciones de Lyapunov

$\dot{x} = f(x)$ (1) suponga que existe una función $L(x)$, con las siguientes propiedades, dado x^* solución de equilibrio de (1)

I) $L(x^*) = 0 \quad L(x) > 0$ para todo $x \neq x^*$

II) $L'(x) < 0 \quad \forall x \neq x^*$

Entonces se dice que x^* es globalmente asintóticamente estable.

Ejemplo: Por construcción de una función de Lyapunov, muestre que el sistema.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 4y \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \quad \text{no tiene soluciones periódicas}$$

$$L(x, y) = x^2 + ay^2, \quad a : \text{parámetro a definir}$$

$$L' = 2x\dot{x} + 2ay\dot{y} = 2x(-x + 4y) + 2ay(-x - y^3) \quad \text{si } a = 4$$

$$L' = -2x^2 - 8y^4 < 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

4.0.3 Método de las nuclinales

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Nuclinal en x , $f(x, y) = 0$ cuando $\dot{x} = 0$

en y , $g(x, y) = 0$ cuando $\dot{y} = 0$

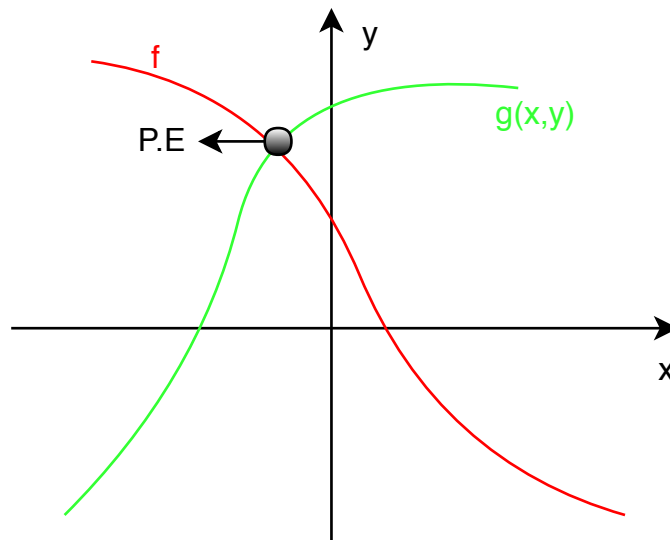


Figura 39.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 & \rightarrow \text{nuclinal en } x : y = x^3 \\ \dot{y} = y - x & \rightarrow \text{nuclinal en } y : y = x \end{cases}$$

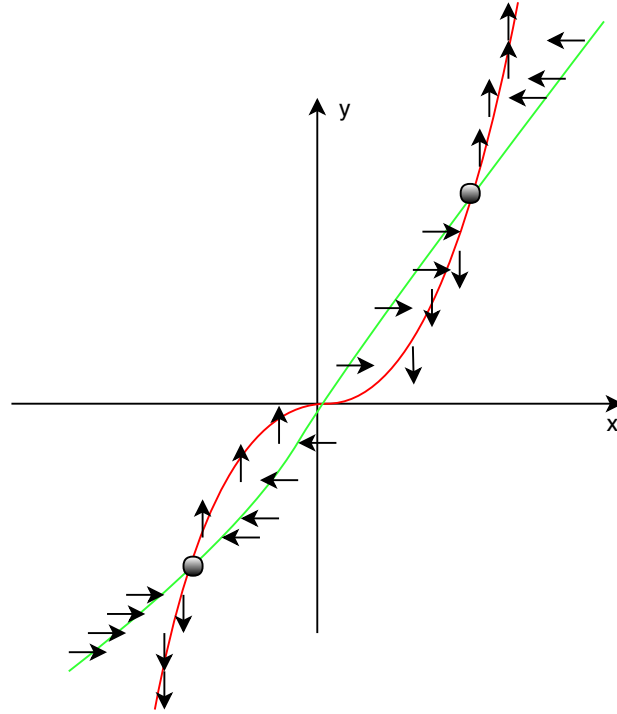


Figura 40.

Criterio de Dulac

Sea $\dot{x} = f(x)$ un campo vectorial continuamente diferenciable en un subconjunto A simplemente conexo del plano, si existe una función escalar g continua y diferenciable, tal que $\nabla \cdot (g\dot{x})$ tiene signo en todo A , luego no existen soluciones periódicas totalmente contenida en A .

Demostración a partir del Teorema de Green.

• Por contradicción: Suponemos que \exists una solución periódica \vec{n} : normal exterior a la curva.

Por el teorema de Green:

$$\iint_D \nabla \cdot (g\dot{x}) dA = \oint_c g\dot{x} \cdot \vec{n} dl$$

Como \dot{x} y \vec{n} son ortogonales por ser \dot{x} tangente a c $\dot{x} \cdot \vec{n} = 0$

Por otro lado, como $\nabla \cdot (g\dot{x})$ no cambia de signo $\forall A$ entonces $\iint_D \nabla \cdot (g\dot{x}) dA \neq 0$

(Contradicción)

Por lo tanto , no existen soluciones periódicas totalmente contenidas en D .

Algunas g 's usadas son:

$$g = 1, \quad \frac{1}{x^a y^b}, \quad e^{ax}, \quad e^{ay}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(4x - x^2 - 3) \end{cases} \quad \text{Demostrar que no tiene soluciones periódicas para } x, y > 0$$

$$\text{Tomando } g(x, y) = \frac{1}{xy}$$

$$g\dot{x} = \left(\frac{1}{y}(2 - x - y), \quad \frac{1}{x}(4x - x^2 - 3) \right)$$

$$\nabla \cdot (g\dot{x}) = -\frac{1}{y} < 0$$

Tarea:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y + x^2 + y^2 \end{cases} \quad \text{Probar que no tiene soluciones periódicas}$$

4.0.4 Teorema de Poincaré - Bendixson

Suponga que:

- 1) R es un subconjunto compacto del plano.
- 2) $\dot{x} = f(x)$ es un campo continuamente diferenciable en un subconjunto abierto de R
- 3) R no contiene ningún punto fijo.
- 4) Existe una trayectoria C que esta "confinada" en R en el sentido que permanece en $R \quad \forall \quad t$

Luego C es una órbita cerrada, o una espiral que va a una órbita cerrada cuando $t \rightarrow \infty$

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad (1) \quad \text{Probar que (1) tiene un ciclo límite para } \mu > 0 \text{ pequeño}$$

- Para $\mu = 0$, $r = 1$ es un ciclo límite estable.

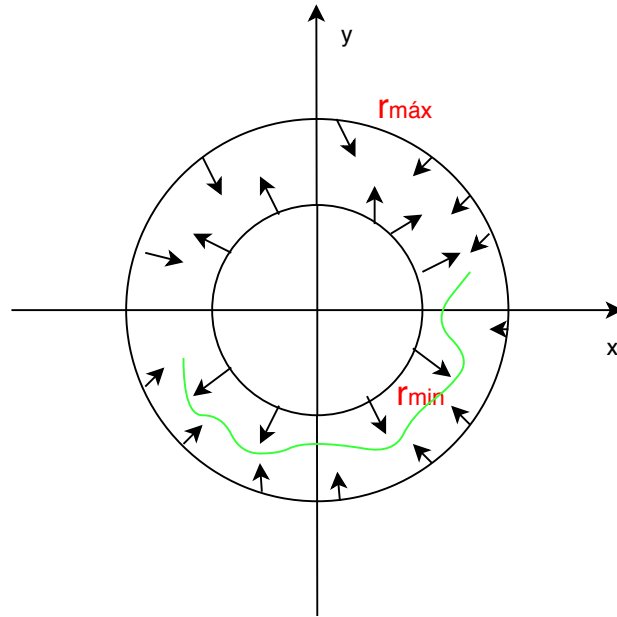


Figura 41.

$$r_{min}(1 - r_{min}^2) + \mu r_{min} \cos \theta > 0$$

$$r_{min}(1 - r_{min}^2) + \mu r_{min} \cos \pi > 0$$

$$r_{min}(1 - \mu - r_{min}^2) > 0$$

$$r_{min} < \sqrt{1 - \mu}$$

4.0.5 Revisión de Bifurcaciones

Bifurcación silla - nodo

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

$$\dot{y} = -y \rightarrow \text{decaimiento exponencial.}$$

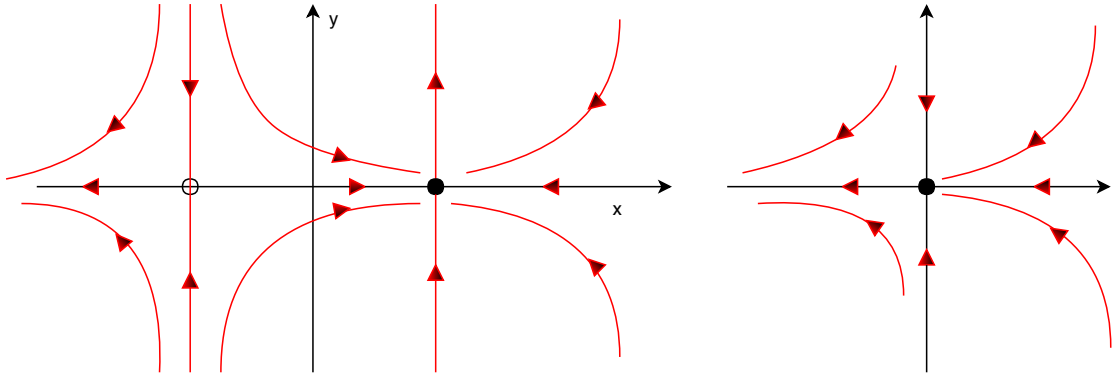


Figura 42.

Gráfico de Bifurcación

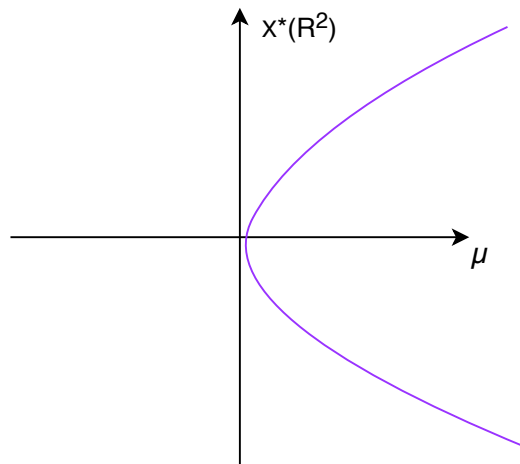


Figura 43.

Caso general

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g_\mu(x, y)\end{aligned}$$

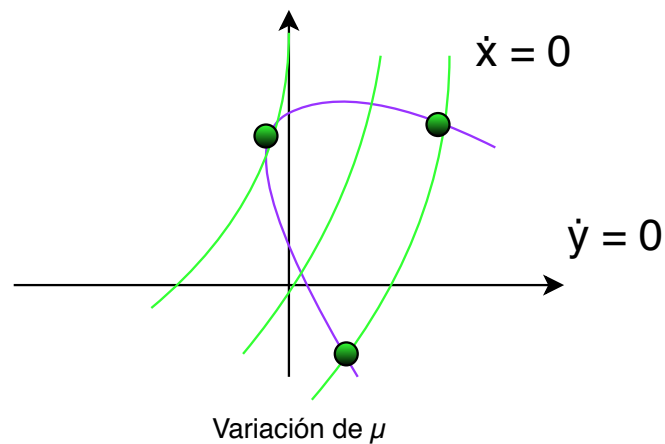


Figura 44.

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by \\ \dot{y} = \frac{x^2}{1+x^2} - by \end{cases} \quad \text{Donde } a, b > 0. \text{Mostrar que tiene 3 puntos fijos para } a < a_c$$

Gráficando las nullclinales

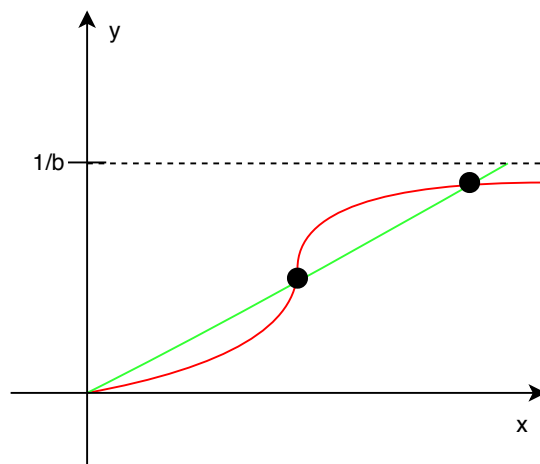


Figura 45.

$$\begin{aligned}\dot{x} = 0 &\Rightarrow y = ax \\ \dot{y} = 0 &\Rightarrow y = \frac{x^2}{b(1+x^2)} \\ ax &= \frac{x^2}{b(1+x^2)} \\ abx^2 - x + ab &= 0 \\ x^* &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2b^2}}{2ab}\end{aligned}$$

$$1 - 4a^2b^2 > 0 \quad a < \frac{1}{2b} \quad \Rightarrow a_c = \frac{1}{2b}$$

Comportamiento en el plano de fase para $a < a_c$

Cálculo del Jacobiano

$$J = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix} \text{ para } (x^*, y^*) = (0, 0) \Rightarrow J = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\text{Tra}(J) = -(a+b) < 0$$

$\Delta = ab > 0 \Rightarrow$ El punto fijo es estable.

En general:

$$\Delta = ab - \frac{2x^*}{(1+x^{*2})^2} = ab \underbrace{\left(\frac{x^{*2}-1}{x^{*2}+1} \right)}_{\varepsilon} \text{ porque } x^* = ab(1+x^{*2})$$

La solución del medio es inestable, si $0 < x^* < 1 \Rightarrow \Delta < 0 \rightarrow$ Pto de Silla

Para $x^* > 1 \quad \Delta < ab \rightarrow$ El tercer punto es estable.

$$\tau^2 - 4\Delta = (a+b)^2 - 4ab\varepsilon > (a+b)^2 - 4ab$$

solo cuando $\varepsilon < 1$

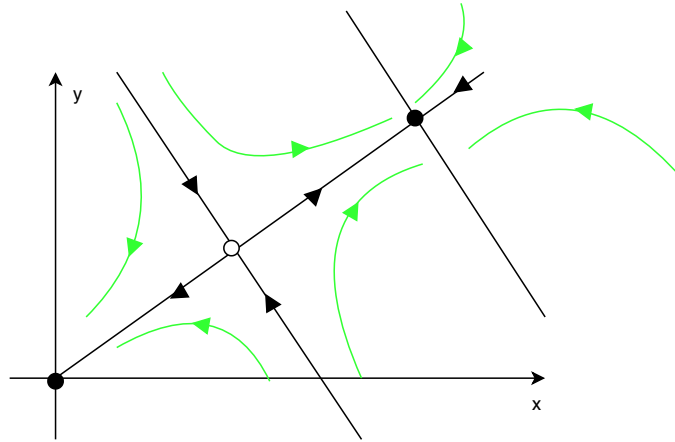


Figura 46.

Nota: La variedad estable, separa el plano en dos regiones, cada una base de atracción para un sumidero.

• Bifurcación tenedor y transcritical

$$\text{Transcrita} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{Tenedor subcrítica} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \mu x + x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$$\text{Tenedor Supercrítica} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Plano de fase para tenedor supercrítica

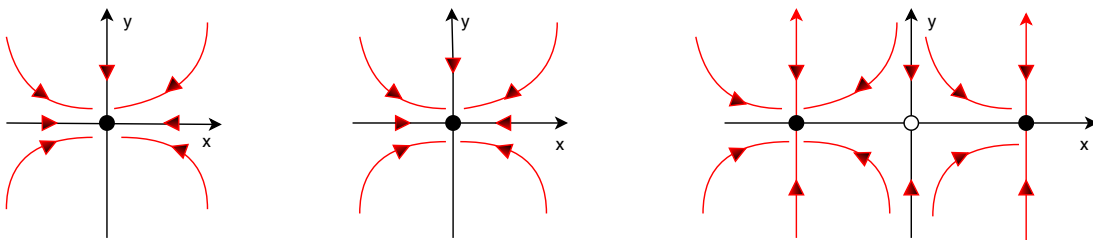


Figura 47.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y + \sin x \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \rightarrow \text{Determinar que posee una bifurcación tenedor supercrítica}$$

note que $x^* = (0, 0)$ siempre es solución de equilibrio
 Linealizando alrededor de (x^*)

$$A = \begin{pmatrix} \mu + 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad T_r = \mu \quad \Delta = -(\mu + 1) - 1 = -(\mu + 2)$$

para $\mu < -2 \Rightarrow x^*$ estable

$\mu_c = -2 \rightarrow$ punto de bifurcación.

Aproximando \dot{x} en $x^* = (0, 0)$

$$\dot{x} = \mu x + x + x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^5) = (\mu + 2)x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^5)$$

Para $x \ll 1$

$$\dot{x} = \left[\mu + 2 - \frac{x^2}{6} \right] x \rightarrow x_1^* = 0 \quad x_{2,3}^* = \pm \sqrt{6(\mu + 2)}$$

Para el retrato de Fase : $A \cong \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

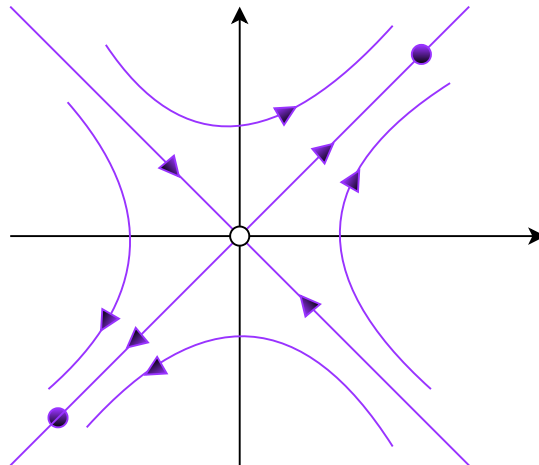


Figura 48.

Bifurcación de HOPF

Notemos que si los valores propios de la matriz jacobiana viven en el segundo cuadrante ($\text{Re}\lambda < 0$), los puntos son estables.

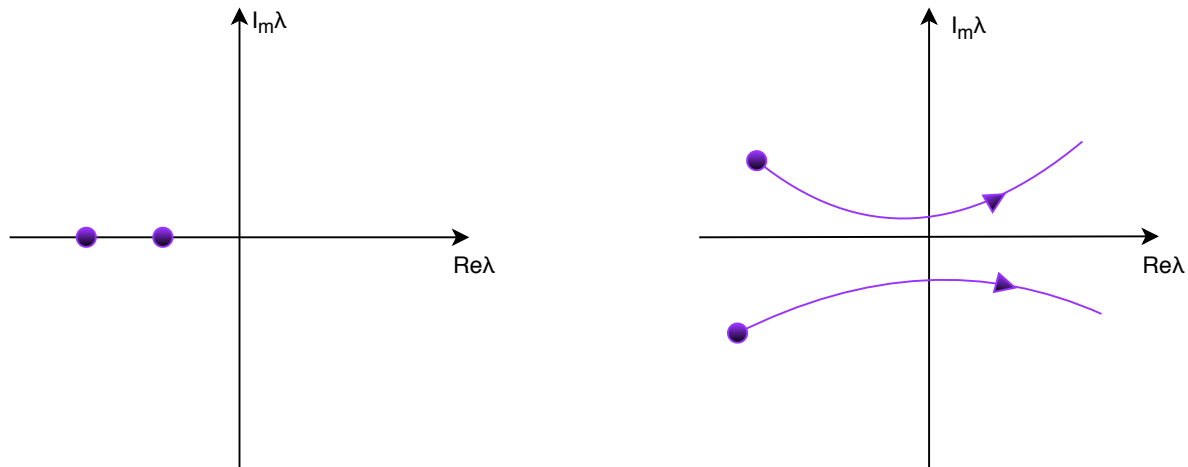


Figura 49.

Queremos ver que pasa con la dinámica.

Bifurcación de HOPF Supercrítica

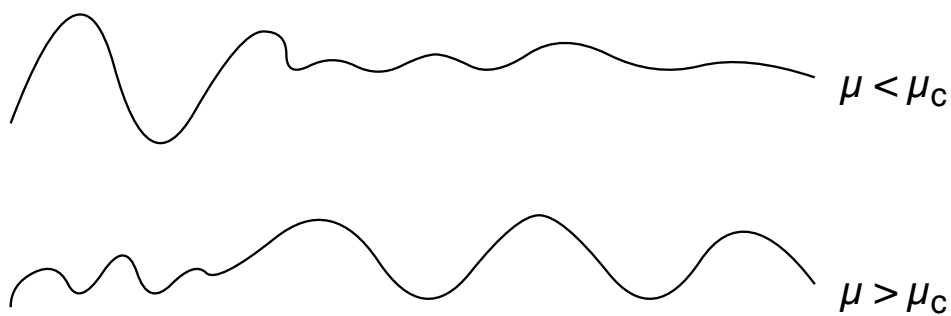


Figura 50.

Nota: En términos del flujo ocurre Bifurcación de HOPF cuando una espiral estable cambia por una inestable, rodeada por un pequeño ciclo límite.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = w + br^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Soluciones radiales} \\ r(\mu - r^2) = 0 \quad r = 0 \quad r = \pm\sqrt{\mu} \quad \text{para } \mu < 0 \end{array}$$

Pasando a coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta} \end{cases}$$

$$= (\mu r - r^3) \cos \theta - (w + br^2)r \sin \theta$$

$$= (\mu - r^2)x - (w + br^2)y$$

$$= (\mu - x^2 - y^2)x - (w + b(x^2 + y^2))y$$

$$\dot{x} = \mu x - wy + 0(x^3 + y^3)$$

$$\dot{y} = \mu y - wx$$

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -w \\ w & \mu \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \mu \pm wi \quad \text{La frecuencia del ciclo límite está dada por } w = I_m(\lambda), \quad \mu = \mu_c \quad T = \frac{2\pi}{I_m(\lambda)}$$

Bifurcación de HOPF subcrítica

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = w + br^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + xy^2 \\ \dot{y} = x + \mu y + y^3 \end{cases} \quad \text{mirar linealización, hacer estudio y pasar a polares}$$

Mapa de Poincaré

Pensemos en un sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y sea un hiperplano de dimensión $(n - 1)$.

$P(x^*) = x^* \Leftrightarrow$ una solución periódica del sistema.

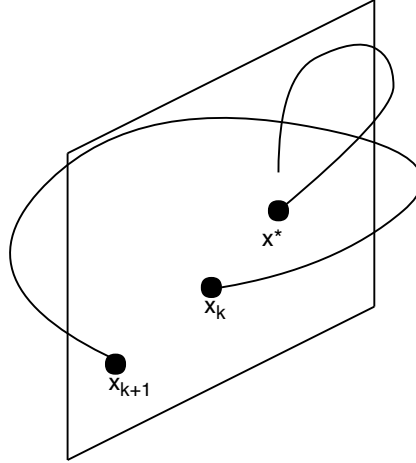


Figura 51.

Ejemplo:

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad S := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\dot{\theta} = 1$$

Calcular el mapa de Poincaré y mostrar que el sistema tiene una órbita periódica.

SOL:

Sea $r_0 \in S$ ya que $\dot{\theta} = 1$ entonces si existe una solución periódica, ella retorna a S en un tiempo $T = 2\pi$, luego $r_1 = P(r_0)$ donde r_1 satisface:

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

$$r_1 = \left[1 + e^{-4\pi}(r_0^2 - 1)\right]^{-\frac{1}{2}} \text{ por lo tanto:}$$

$$P(r) = \left[1 + e^{-4\pi}(r^2 - 1)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

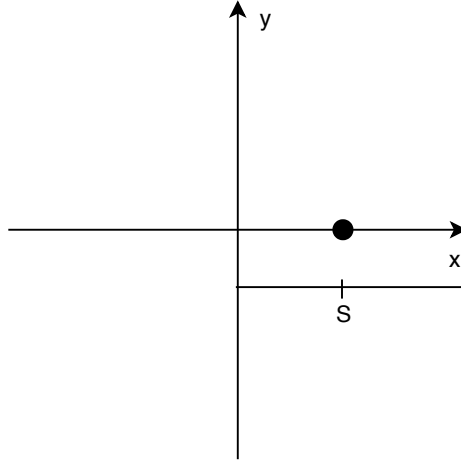


Figura 52.

Estabilidad lineal de orbitas periódicas

Pensemos que el sistema $\dot{x} = f(x)$, tiene una órbita periódica para el mapa de Poincaré $P(x)$ suponga que existe x^* tal que $P(x^*) = x^*$, $x^* \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Un vector V_0 tal que $\|V_0\| \ll 1$:

$V_0 + x^* \rightarrow$ se quiere ver que pasa.

$$V_1 + x^* = P(V_0 + x^*)$$

$$V_1 + x^* = P(x^*) + D \cdot P(x^*)V_0 + 0(\|V_0\|^2)$$

$$V_1 + x^* \simeq x^* + D \cdot P(x^*)V_0$$

$$\therefore \underline{V_1 \cong D \cdot P(x^*)V_0}; \quad D \cdot P(x^*) \in \mu\mathbb{R}_{(n-1) \times (n-1)}$$

El criterio de estabilidad va a estar determinado por los valores propios de la matriz $[D \cdot P(x^*)]$.

La órbita periódica es linealmente estable si $|\lambda_j| < 1$ para todo $j = 1, \dots, n-1$

Pensemos que todos los valores propios son distintos, entonces, existe una base $\{e_j\}$

$$V_0 = \sum_{j=1}^{n-1} B_j e_j$$

$$V_1 = D \cdot P(x^*) \sum_{j=1}^{n-1} B_j e_j$$

$$V_1 = \sum_{j=1}^{n-1} B_j \lambda_j e_j$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= \sum_{j=1}^{n-1} B_j \lambda_j^2 e_j \\
&\vdots \\
V_k &= \sum_{j=1}^{n-1} B_j \lambda_j^k e_j \quad \Rightarrow \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \|V_k\| \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_j| < 1
\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} \quad \text{Linealizamos el mapa alrededor de } r^* = 1$$

$$\begin{aligned}
&\text{Sea } r = 1 + \eta, \quad \eta \ll 1 \\
\dot{r} = \dot{\eta} &= (1 + \eta)(1 - (1 + \eta)^2) \\
&= (1 + \eta)(-\eta^2 - 2\eta) \\
&= -\eta^3 - 3\eta^2 - 2\eta \\
&= -2\eta + 0(\eta^3) \\
\dot{\eta} &\approx -2\eta \\
\eta(t) &= \eta_0 e^{-2t} \\
\eta(2\pi) &= \eta_0 e^{-4\pi} \\
\eta_1 &= \eta_0 e^{-4\pi} \\
P &= |e^{-4\pi}| < 1
\end{aligned}$$

Teorema: Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f \in C^1(E)$. Suponga que $\phi_t(x_0)$ es una solución periódica de $\dot{x} = f(x)$ (1) de período T y que el ciclo:

$$r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \phi_t(x_0), \quad 0 \leq t \leq T\} \subset E$$

Sea Σ el hiperplano ortogonal a r .

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}$$

Luego existe $\delta > 0$ y una función $\tau(x)$ definida y continuamente diferenciable para $x \in B_\delta(x_0)$ tal que $\tau(x_0) = T$ y $\phi_{\tau(x)} \in \Sigma \quad \forall \quad x \in B_\delta(x_0)$.

La prueba es consecuencia inmediata del teorema de la función implícita.

Defino: $F(t, x) := [\phi_t(x) - x_0] \cdot f(x_0)$

Observe \rightarrow (i) $F(T, x_0) = [\phi_T(x_0) - x_0] \cdot f(x_0) = 0$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial t}(T, x_0) = \left[\frac{\partial}{\partial t} (\phi_t(x_0) - x_0) \right] \cdot f(x_0)$$

$$= f(x_0) \cdot f(x_0)$$

$$= \|f(x_0)\|^2 \neq 0$$

Por el teorema de Función implícita, existe $\delta > 0$ y una función $\tau(x)$ tal que $F = (\tau(x), X) = 0 \quad \forall \quad x \in B_\delta(x_0)$ y $\tau(x_0) = T$, por lo tanto:

$$F(\tau(x), x) = [\phi_t(x) - x_0] \cdot f(x_0) = 0$$

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$$

Definición: Sea F, Σ, δ y $\tau(x)$ como se definió en el teorema, luego para $x \in B_\delta(x_0) \cap \Sigma$, la función

$$P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$$

es llamado el mapa de Poincaré para F en x_0

Ejemplo:

$$\phi'' + \alpha \phi' + \sin \phi = I \quad (1) \quad \text{para} \quad I \geq 0 \quad \alpha > 0$$

Si $I > 1$: No hay soluciones de equilibrio.
Existe una órbita cerrada para $I > 1$.

$$y' = I \begin{cases} \phi' = y & \phi : \text{Variable angular} \\ \sin \phi - \alpha y & y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(\phi, y) \in S^1 \times \mathbb{R}$$

Pienso en la nuclinal y:

$$y = \frac{I - \sin \phi}{\alpha} \quad y_1 = \frac{I - 1}{\alpha} \quad y_2 = \frac{I + 1}{\alpha}$$

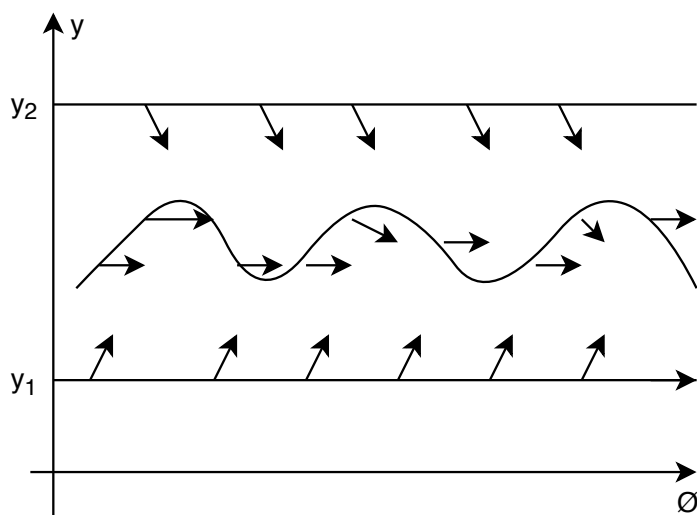


Figura 53.

2π — Periódico

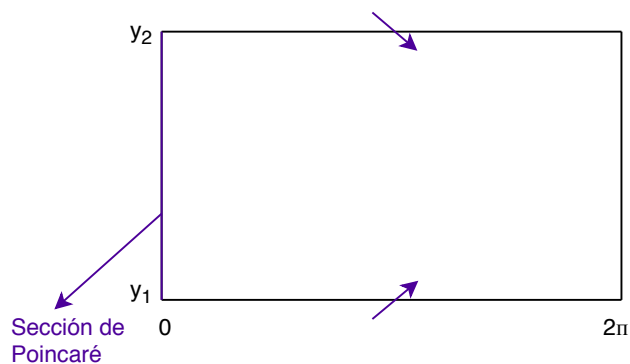


Figura 54.

Probar que existe un $Y^* \in [Y_1, Y_2]$ tal que $P(Y^*) = Y^*$.

Sea $(0, Y_1)$ para Y_1 :

$P(Y_1) > Y_1$ por otro lado para $(0, Y_2)$

$P(Y_2) < Y_2$

Por el teorema del valor medio existe un $Y^* \in [Y_1, Y_2]$ tal que $P(Y^*) = Y^*$

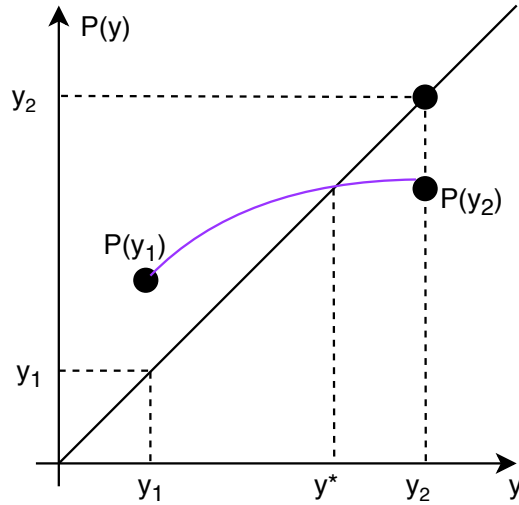


Figura 55.

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{1-x'^2}} \right)' + cx' + a \sin x = b \rightarrow \text{Péndulo relativista}$$

$$[\phi(x')] + cx' + a \sin x = b \rightarrow \text{La } \phi - \text{ecuación de Tricomi}$$

ϕ : Difeomorfismo (Función con inversa continua)

$$\phi'(x')x'' + cx' + a \sin x = b$$

$$\begin{cases} x' = \phi^{-1}(y) \\ y = \phi(x') \\ y' = \phi'(x')x'' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \phi^{-1}(y) \\ y' = b - a \sin x - c\phi^{-1}(y) \end{cases}, \quad \begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi'(0) \neq 0 \end{cases}, \quad \phi = \text{monótona creciente}$$

Con $c = 0$ (Conservativo)

$$H(x, y) = \int_0^y \phi^{-1}(s)ds - a \cos x - bx \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Principio de invarianza de Lasalle

$$x'' + cx' + a \sin x = 0$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -a \sin x - cy \end{cases}$$

Capítulo 5

Diagramas de Fase

Este capítulo comienza nuestro estudio de los sistemas no lineales bidimensionales. Primero consideramos algunas de sus propiedades generales. Luego clasificamos los tipos de puntos fijos. Eso puede surgir, basándose en nuestro conocimiento de los sistemas lineales. La teoría se desarrolla aún más a través de una serie de ejemplos de biología (competencia entre dos especies) y la física (sistemas conservadores, sistemas reversibles y el péndulo). El capítulo concluye con una discusión de la teoría del índice, una topología Método que proporciona información global sobre la fase de retrato. Este capítulo trata principalmente sobre puntos fijos.

Cuando se resuelve un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos variables de estado puede graficarse una contra la otra en un diagrama de fase. El tiempo no aparece en forma explícita. Cuando se resuelve un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias con dos variables de estado puede graficarse una contra la otra en un diagrama de fase.

5.0.1 Planos de Fase

La forma general de un campo vectorial en el plano de fase es

$$\dot{x} = f(x_1, x_2) \tag{5.1}$$

donde f_1 y f_2 tienen funciones dadas. Este sistema se puede escribir de forma más compacta. en notación vectorial como

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.2}$$

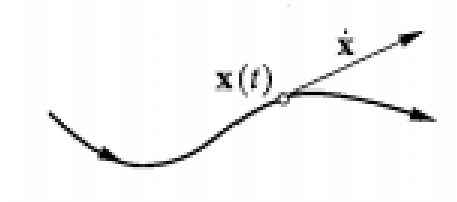


Figura 56.

Sea por ejemplo el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -4x_2 \end{aligned}$$

En este caso la solución es muy sencilla pues cada ecuación es independiente:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1o}e^{-t} \\ x_2(t) &= x_{2o}e^{-4t} \end{aligned}$$

En este caso para t tendiendo a infinito la solución (cualquiera) converge al punto $(0, 0)$. Si representamos una variable contra la otra obtenemos el siguiente diagrama de fase:

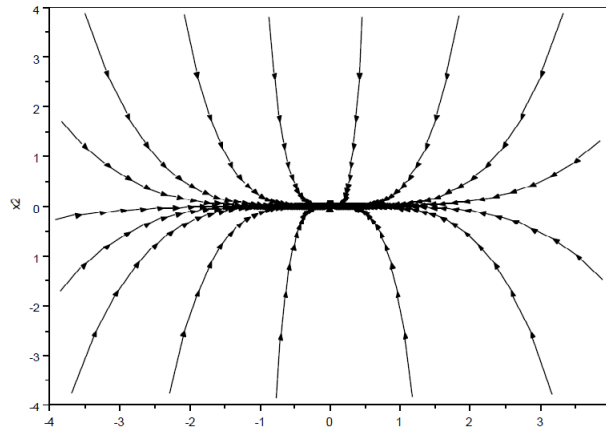


Figura 57.

Este es un ejemplo de diagrama de fase tipo *nodo estable*. Véase [ejem9.1.sce](#).

Por el contrario, el siguiente sistema es inestable:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= 4x_2 \end{aligned}$$

La solución es

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_{1o}e^{-t} \\ x_2(t) &= x_{2o}e^{4t}\end{aligned}$$

En particular la variable x_2 diverge cuando t tiende a infinito y la solución $(0,0)$ es inestable.

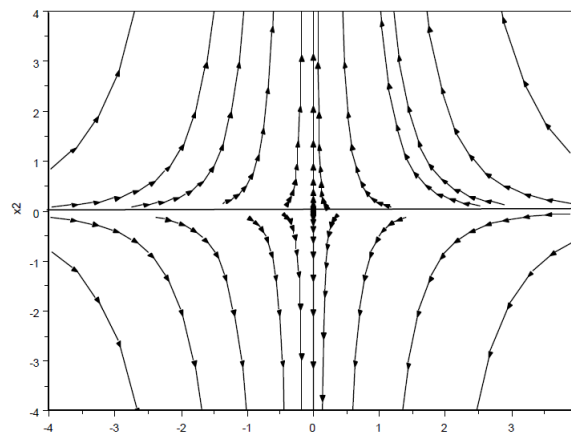


Figura 58.

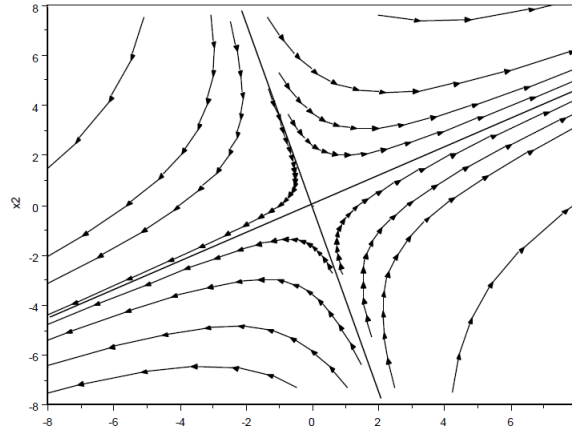
Véase ejem9.2.sce. Los valores propios (que coinciden con los ejes en este caso) definen las separatrices del diagrama de modo que ninguna de las trayectorias las cruza.

Otro sistema inestable tipo *silla de montar* es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2\end{aligned}$$

Que es de la forma $\dot{X} = AX$

Con
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Figura 59.**

Véase [ejem9.3.sce](#). Los valores propios del sistema son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1.5616 \\ \lambda_2 &= 2.5616\end{aligned}$$

El hecho de que uno de ellos sea positivo implica que el sistema es inestable.

Los vectores propios definen las separatrices del sistema

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0.2703 \\ -0.9628 \end{bmatrix}$$

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 0.8719 \\ 0.4896 \end{bmatrix}$$

El segundo vector propio, asociado al valor propio positivo define el subespacio inestable.

El siguiente ejemplo corresponde a un *foco* inestable

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2\end{aligned}$$

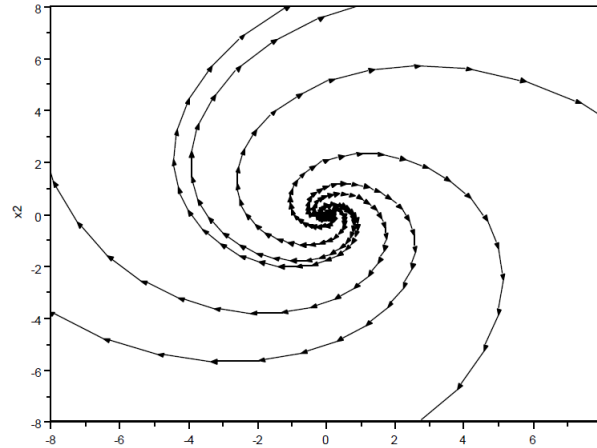


Figura 60.

Véase [ejem9.4.sce](#). En este caso los valores propios son complejo conjugados:

$$\lambda = 1 \pm 2j$$

Cuando una parte de los valores propios es nula tenemos el caso de un *centro* :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Véase [ejem9.5.sce](#). En este caso los valores propios son: $\lambda = 0 \pm 1.7321j$

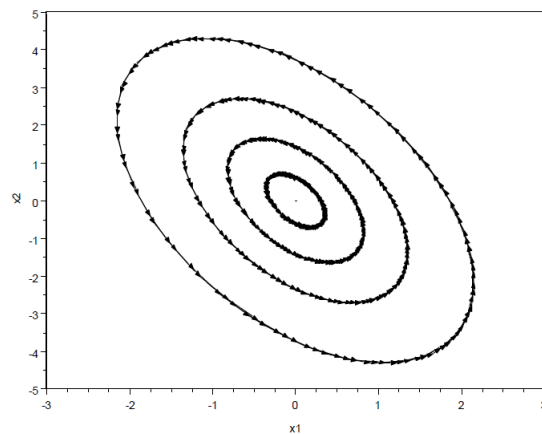


Figura 61.

Como generalización si tenemos un sistema de dos variables

$$\dot{X} = AX$$

Con
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Para el cálculo de los valores propios hacemos

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \end{aligned}$$

O sea

$$\lambda = \frac{\text{tr}(A) \pm \sqrt{(\text{tr}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Al menos un valor propio es negativo si $\text{tr}(A) < 0$; los valores propios serán complejos si $4\det(A) > (\text{tr}(A))^2$

Este resultado se puede expresar en forma gráfica en el siguiente diagrama.

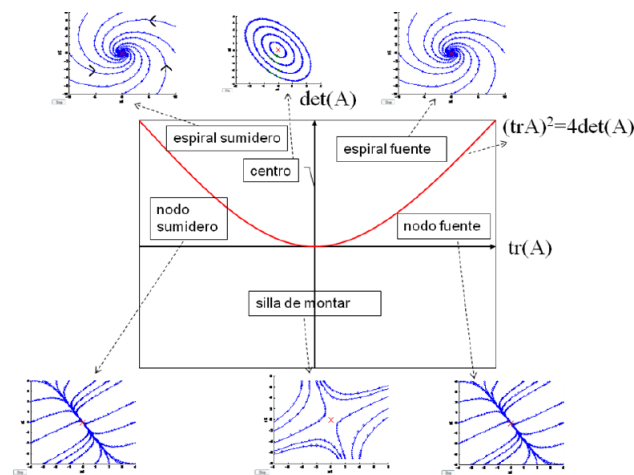


Figura 62.

5.1 Extremo de funciones de varias variables

1. Extremo incondicionado

Sea $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o brevemente $f(x)$, una función definida en un recinto D del espacio euclídeo E^n de n dimensiones. Diremos que la función $f(x)$ *alcanza su valor máximo (mínimo)* en el punto $x_0 \in D$ si

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

Cualquiera que sea el punto $x \in D$.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS. *Toda función continua en un recinto acotado cerrado alcanza en él sus valores máximo y mínimo*

DEFINICIÓN 1: Sea $f(x)$ una función definida en un recinto $D \subset E^n$. Diremos que el punto $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ es *un punto de máximo estricto (un punto de mínimo estricto, respectivamente)* de la función $f(x)$ si existe una vecindad $\Omega(x^0)$ del punto x^0 tal que la desigualdad $f(x) < f(x^0)$ (la desigualdad $f(x) > f(x^0)$, respectivamente) se cumple para todos los puntos $x \in \Omega(x^0) \cap D, x \neq x^0$.

Es decir, lo que caracteriza el punto de máximo estricto (el punto de mínimo estricto, respectivamente) es que

$$\Delta f = f(x) - f(x^0) < 0 (\Delta f > 0, \text{respectivamente})$$

Para todo $x \in \Omega(x^0) \cap D, x \neq x^0$.

En cambio, si para el punto x^0 existe una vecindad $\Omega(x^0)$ tal que para todos los puntos $x \in \Omega(x^0) \cap D$ se cumple la desigualdad $f(x) \leq f(x^0)$ (la desigualdad $f(x) \geq f(x^0)$, respectivamente), se dice simplemente que el punto x^0 *es un punto máximo (un punto de mínimo, respectivamente)*.

DEFINICIÓN 2. Los puntos de máximo y de mínimo de la función $f(x)$ se denominan *punto de extremo* de la misma.

TEOREMA 1 (condición necesaria de extremo). *Sea $f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, una función definida en una vecindad del punto $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. si este punto es un punto de extremo de la función $f(x)$ y si en él existen las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_j} (j = 1, 2, \dots, n)$, todas ellas*

son iguales a cero:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Si la función $f(x)$ es diferenciable en el punto de extremo x^0 , su diferencial en este punto es igual a cero: $df(x^0) = 0$.

DEFINICIÓN 3. Los puntos en los que se cumple la condición necesaria de extremo de la función $f(x)$ se denominan *puntos críticos de la misma*.

Los puntos x^0 en los que $df(x^0) = 0$ se denominan *puntos estacionarios de la función $f(x)$* .

La condición $df(x^0) = 0$ es equivalente a la condición

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La existencia de punto crítico no garantiza aún la existencia del extremo de una función.

5.1.1 Condiciones suficientes de extremo estricto.

DEFINICIÓN 4. Se dice que la forma cuadrática

$$A(x) = A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j;$$

$$a_{ij} = a_{ji}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

es *definida positiva* (*definida negativa, respectivamente*) si $A(x) > 0$ ($A(x) < 0$ respectivamente) para todo punto $x \in E^n, x \neq 0$, y se anula sólo para $x = 0$, o sea, para $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

La forma cuadrática se denomina *no negativa* si jamás toma valores negativos. Por ejemplo, las formas

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{y} \quad (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

Son ambas no negativas. La primera es definida positiva ya que se anula sólo para $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$; en cambio la segunda no lo es ya que se anula, por ejemplo, para

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$.

Una forma cuadrática definida positiva o definida negativa se denomina *forma cuadrática definida*. Una forma cuadrática que toma valores tanto positivos como negativos se denomina *indefinida*.

TEOREMA 2. (condiciones suficientes de extremo estricto). Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad del punto $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ en la que son continuas sus segundas derivadas y sea x^0 un punto estacionario de la función $f(x)$. Si la forma cuadrática

$$A(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (1)$$

o sea, la segunda diferencial de la función f en el punto x^0 , es definida positiva (definida negativa, respectivamente), el punto x^0 es punto de mínimo estricto (punto máximo estricto, respectivamente); si la forma cuadrática (1) es indefinida, no hay extremo en el punto x^0 .

CRITERIO DE SYLVESTER DE FORMAS CUADRÁTICAS DEFINIDAS POSITIVAS.

Esta es una condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática

$$A(x) = A(x_1, x_2, \dots, x_n) == \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

con $a_{ij}; i, j = 1, 2, \dots, n$; sea definida positiva es que se cumpla

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

Condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática (2) sea definida negativa es que se cumpla

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$\dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^n > 0,$$

CASO $n = 2$. Sea $f(x, y)$ una función definida en una vecindad del punto (x_0, y_0) en la que son continuas sus derivadas parciales de segundo orden y sea x_0, y_0 un punto estacionario, es decir, sea

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Entonces, si en el punto (x_0, y_0)

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

hay extremo en este punto; a saber, máximo si en él

$$f''_{xx} < 0 \quad (f''_{yy} < 0)$$

y mínimo si en él

$$f''_{xx} > 0 \quad (f''_{yy} > 0).$$

Si en el punto (x_0, y_0)

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0,$$

no hay extremo en el punto x_0, y_0 . Por último, si en el punto (x_0, y_0)

$$f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0,$$

en dicho punto puede haber extremo y puede no haberlo; este caso requiere un estudio complementario.

que se denominan ecuaciones de enlace.

Sea $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ un punto interior del recinto D .

Se dice que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tiene *máximo condicionado* (*mínimo condicionado, respectivamente*) en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ si la desigualdad

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

(la desigualdad $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, respectivamente) se cumple en una vecindad del punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, siempre que los puntos (x_1, x_2, \dots, x_n) y $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ verifiquen las ecuaciones del enlace (1).

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

Supongamos que:

1) las derivadas parciales de primer orden de las funciones $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) son continuas en el recinto D ;

2) $m < n$, siendo el rango de la matriz $(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) igual a m en todo punto del recinto D .

Consideremos una función nueva (función de Lagrange)

$$\varphi = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i,$$

donde λ_i son factores constantes indeterminados.

Después analizamos el extremo incondicionado de la función $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o sea, formamos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = 0 \quad (2)$$

y, a partir de este sistema y de las m ecuaciones de enlace

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_m = 0,$$

determinamos los valores de los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ y las coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n)

de los posibles puntos de extremo.

Las condiciones (2) son condiciones necesarias de extremo tanto para la función de Lagrange como para la función inicial $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Si el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ es un punto extremo condicionado de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ será a la vez un punto estacionario de la función de Lagrange, o sea, en este punto será $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. Para analizar el punto estacionario $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ en tanto que extremo condicionado de la función de Lagrange $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ habrá que considerar la forma cuadrática

$$B(dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-m}) = \sum_{i,j=1}^{n-m} b_{ij} dx_i dx_j, \quad (3)$$

o sea, la segunda diferencial de la función Lagrange, teniendo en cuenta las condiciones

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Si la forma cuadrática (3) es definida, en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ tendremos extremo condicionado estricto; a saber, máximo condicionado estricto si la forma cuadrática (3) es definida negativa, y mínimo condicionado estricto si la forma cuadrática (3) es definida positiva.

En cambio si la forma cuadrática (3) es indefinida, en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ no habrá extremo condicionado.

Por consiguiente, la existencia en el punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ de máximo (mínimo) incondicionado de la función de Lagrange (tomada con los valores encontrados para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$) implica la existencia de este punto máximo (mínimo) condicionado de la función $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con las condiciones de enlace

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

La ausencia de extremo incondicionado de la función de Lagrange $\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ no significa aún la ausencia de extremo condicionado de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

5.2 Extremo de Funcionales

5.2.1 Funcional. Variación de una funcional y sus propiedades

1º. Definición de funcional. Proximidad de curvas. Sea M una clase de funciones $y(x)$. Si a toda función $y(x) \in M$ le corresponde, según una regla, un número determinado J se dice que en la clase M está definida la *funcional* J y se escribe $J = J[y(x)]$.

La clase M de funciones $y(x)$ en la que está definida la funcional $J[y(x)]$ se denomina *campo de definición de la funcional*.

2º. Continuidad de una funcional. Una funcional $J[y(x)]$ definida en la clase M de funciones $y(x)$ se llama *continua* en $y = y_0(x)$ en el sentido de proximidad de n -ésimo orden su cualquiera que sea el número $\epsilon > 0$ existe un número $\eta > 0$ tal que la desigualdad $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon$ se cumple para todas las funciones admisibles $y = y(x)$, o sea, para todas las funciones que satisfacen las condiciones

$$|y(x) - y_0(x)| < \eta, |y'(x) - y_0'(x)| < \eta, \dots, |y^n(x) - y_0^n(x)| < \eta.$$

En otras palabras, si se tiene $|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \epsilon$ siempre que

$$\rho_n[y(x), y_0(x)] < \eta.$$

Toda funcional que no sea continua en el sentido de proximidad de n -ésimo orden se denominará *discontinua* en este sentido de proximidad. Poniendo

$$y^k(x) = y_0^k(x) + \alpha w^k(x) \quad (k = 0, 2, \dots, n),$$

donde α es un parámetro y $w(x)$ es una función cualquiera de la clase M , podemos persuadirnos de que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} y^k(x) = y_0^k(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

y, por eso, podemos definir la continuidad de la funcional $J[y(x)]$ en $y = y_0(x)$ de la forma siguiente

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} J[y_0(x) + \alpha w(x)] = J[y_0(x)].$$

3°. Variación de una funcional. Sea $J[y(x)]$ una funcional definida en el conjunto M de funciones $y(x)$. La magnitud

$$\Delta J = \Delta J[y(x)] = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)]$$

$$(\delta y = \tilde{y}(x), \quad \text{donde } y(x) \in M \text{ e } \tilde{y}(x) \in M)$$

se denomina *incremento de la funcional* $J[y(x)]$ correspondiente al incremento δy del argumento.

4°. Segunda definición de la variación de una funcional. Se llama *variación de la funcional* $J[y(x)]$ en el punto $y = y(x)$ el valor que toma en $\alpha = 0$ la derivada de la funcional $J[y(x) + \alpha \delta y]$ (considera en tanto que función de α) respecto al parámetro α :

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x) + \alpha \delta y] \big|_{\alpha=0}.$$

Si existe la variación de la funcional en tanto que parte principal lineal de su incremento (o sea, si existe la variación en el sentido de la primera definición), también existe la variación en tanto que valor en $\alpha = 0$ de la derivada respecto al parámetro α y ambas variaciones coinciden.

5°. Segunda variación de una funcional. Una funcional $J[x, y]$ dependiendo de los elementos x e y (que pertenecen ambos a un espacio lineal) se denomina bilineal si es una funcional lineal en y para x fijo y una funcional lineal en x para y fijo. O sea, la funcional $J[x, y]$ es bilineal si

$$J[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 J[x_1, y] + \alpha_2 J[x_2, y],$$

$$J[x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] = \beta_1 J[x, y_1] + \beta_2 J[x, y_2].$$

Poniendo en la funcional bilineal $y = x$ obtenemos la expresión $J[x, x]$ llamada funcional cuadrática.

Toda funcional bilineal definida en un espacio de dimensión finita se denomina *forma bilineal*. Una funcional cuadrática $J[x, x]$ se denomina *definida positiva* si $J[x, x] > 0$ cualquiera que sea el elemento no nulo x .

6°. Extremo de una funcional. Condición necesaria de extremo. Diremos que la funcional $J[y(x)]$ alcanza su *máximo* en la curva $y = y_0(x)$ si los valores que toma la funcional $J[y(x)]$ en cualesquiera curvas próximas a $y = y_0(x)$ no son mayores que $J[y_0(x)]$, o sea, si

$$\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0.$$

Si $\Delta J \leq 0$ y $\Delta J = 0$ sólo para $y(x) = y_0(x)$, diremos que se alcanza *máximo estricto* en la curva $y = y_0(x)$.

Análogamente se define la curva $y = y_0(x)$ en la que se alcanza *un mínimo*. En este caso se tiene $\Delta J \geq 0$ para todas las curvas próximas a la curva $y = y_0(x)$

5.2.2 Problema elemental del Cálculo variacional. Ecuación de Euler

Supongamos que la función $F(x, y, y')$ tiene derivadas parciales continuas hasta de segundo orden inclusive respecto a todos sus argumentos.

El problema elemental del cálculo variacional es el siguiente:

entre todas las funciones $y(x)$ que tiene derivada continua y que satisfacen las condiciones de frontera

$$y(a) = A \text{ y } y(b) = B \quad (1)$$

hallar la función que ofrece extremo débil a la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (2)$$

En otras palabras, el problema elemental del Cálculo variacional consiste en hallar el extremo débil de la funcional de tipo (2) en el conjunto de todas las curvas suaves que unen dos puntos fijos $P_1(a, A)$ y $P_2(b, B)$.

TEOREMA 1. *Condición necesaria 1) para que la funcional (2), definida en el conjunto de todas las funciones $y = y(x)$ que tienen derivada continua y que satisfacen las condiciones de frontera (1), alcance su valor extremo en la función $y(x)$ es que esta función verifique la ecuación de Euler*

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0. \quad (3)$$

Las curvas integrales de la ecuación de Euler se denominan *extremales* (o curvas de Lagrange). En forma desarrollada la ecuación de Euler da

$$y''(x)F_{y'y'} + y'(x)F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0 \quad (F_{y'y'} \neq 0)$$

y representa una ecuación diferencial de segundo orden de modo que su solución general comprenderá dos constantes arbitrarias cuyos valores se determinan, hablando términos generales, de las condiciones de frontera (1).

La funcional (2) puede alcanzar extremo sólo en las extremales que satisfacen las condiciones (1).

El problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} &= 0, \\ y(a) &= A, \quad y(b) = B \end{aligned} \right\}$$

no siempre tiene solución y si la solución existe, puede no ser única.

5.2.3 Generalizaciones del problema elemental del Cálculo variacional

1°. Funcionales que dependen de derivadas de órdenes superiores.

Supongamos que se tiene la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)] dx, \quad (1)$$

donde F es una función diferenciable $n+2$ veces respecto a todos los argumentos e $y(x) \in C_n[x_0, x_1]$, y supongamos que las condiciones de frontera tiene la forma

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) &= y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \\ y(x_1) &= y_1, y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Las extremales de la funcional (1) con las condiciones (2) son las curvas integrales de la ecuación de Euler - Poisson

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} = 0.$$

2°. Funcionales que dependen de m funciones. En el caso de una funcional que depende de m funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$

$$J[y_1, y_2, \dots, y_m] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y'_1, y'_2, \dots, y'_m) dx$$

y con las condiciones de frontera de tipo

$$y_k(x_0) = y_k^0, \quad y_k(x_1) = y_k^1 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

las extremales se determinan del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (9)$$

que se denomina *sistema de ecuaciones de Euler*.

3º. Funcionales que dependen de funciones de varias variables independientes.
Consideremos la funcional

$$J[z(x, y)] = \iint_D F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy, \quad (10)$$

donde F es una función diferenciable tres veces respecto a sus argumentos, y supongamos que pide hallar la función $z = z(x, y)$ que sea continua conjuntamente con sus derivadas hasta el segundo orden inclusive en el recinto D , que tome valores fijos en la frontera Γ del recinto D y que realice el extremo de la funcional (10).

Si el extremo de la funcional (10) se alcanza en la superficie $z = z(x, y)$, la función $z = z(x, y)$ satisface la *ecuación de Euler - Ostrogradski*

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0, \quad (11)$$

donde $\frac{\partial}{\partial x} F_p$ y $\frac{\partial}{\partial y} F_q$ son las derivadas parciales completas respecto a x y y , respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_p &= F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} F_q &= F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}; \end{aligned}$$

aquí se ha tomado, para abreviar, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

La ecuación (11) representa la condición necesaria de extremo de la funcional (10). Es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden; se busca su solución $z = z(x, y)$ que toma valores fijos en la frontera Γ .

5.2.4 Invariancia de la ecuación de Euler.

Si la funcional:

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

se transforma efectuando una sustitución de la variable independiente o una sustitución simultánea de la función incógnita y de la variable independiente, las extremales continúan determinándose de la ecuación de Euler que se obtiene a partir del integrando transformado. En esto consiste la invariancia de la ecuación de Euler.

Sea $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ con la particularidad de que

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces

$$\int F(x, y, y') dx = \int F \left[x(u, v), y(u, v), \frac{y_u + y_v v'_u}{x_u + x_v v'_u} \right] (x_u + x_v v'_u) du = \int \Phi(u, v, v'_u) du$$

y las extremales de la funcional inicial se determinan de la ecuación de Euler para la funcional $\int \Phi(u, v, v'_u) du$:

$$\Phi_v - \frac{d}{du} \Phi'_v = 0.$$

5.2.5 Campo de extremales

La familia de curvas $y = y(x, c)$ forma un *campo propio* en el recinto D del plano xOy si por cada punto (x, y) de este recinto pasa una y sólo una curva de la familia $y = y(x, c)$.

El coeficiente angular $p(x, y)$ de la tangente a la curva de la familia $y = y(x, c)$ que pasa por el punto (x, y) se denomina *inclinación del campo en el punto (x, y)* .

La familia de curvas $y = y(x, c)$ forma un campo *central* en el recinto D del plano xOy si estas curvas cubren sin cruzarse todo el recinto D y arranca de un mismo punto (x_0, y_0) que no pertenece al recinto D . El punto (x_0, y_0) se llama *centro* del haz de curvas.

1º. Condición suficiente de Jacobi para poder incluirla extremal en un campo

central de extremales. Condición suficiente para que el arco AB de una extremal pueda ser incluido en un campo central de extremales con centro en el punto $A(x_0, y_0)$, es que el punto A^* conjugado del punto A no pertenezca al arco AB .

2º. Condiciones suficientes de Legendre. Condición suficiente para que la extremal de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1;$$

se pueda incluir en un campo de extremales es que se cumpla la condición reforzada de Legendre. Esta consiste en que la desigualdad

$$F_{y'y'} > 0$$

se cumpla en todos los puntos de la extremal considerada (o sea, para todos los $x \in [x_0, x_1]$).

5.2.6 Condiciones suficientes de extremo de una funcional

Se considera el problema variacional elemental, o sea, se considera la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

con las condiciones de frontera

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \quad (2)$$

1º. Condiciones suficientes de Weierstrass. Se denomina *función de Weierstrass* $E(x, y, p, y')$ la función definida mediante la igualdad $E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$, donde $p = p(x, y)$ es la inclinación, en el punto (x, y) , del campo de extremales del problema variacional (1) y (2).

La curva C realiza el extremo débil de la funcional (1) si:

- 1) la curva C es una extremal de la funcional (1) que satisface las condiciones de frontera (2), o sea, es la solución de la ecuación de Euler para la funcional (1) que satisface las condiciones (2);
- 2) la extremal C puede ser incluida en un campo de extremales (esto tendrá lugar, en particular, si se cumple la condición de Jacobi);
- 3) la función de Weierstrass $E(x, y, p, y')$ conserva su signo en todos los puntos x, y próximos a la extremal C y para valores de y' proximosados a $p(x, y)$. La funcional $J[y(x)]$ tendrá máximo

en C si $E \leq 0$ y mínimo si $E \geq 0$.

5.3 Condiciones suficiente de extremo fuerte.

La curva C realiza el extremo fuerte de la funcional (1) si:

- 1) la curva C es una extremal de la funcional (1) que satisface las condiciones de frontera (2);
- 2) la extremal C puede ser incluida en un campo de extremales;
- 3) la función de Weierstrass $E(x, y, p, y')$ conserva su signo en todos los puntos (x, y) próximos a la extremal C y para valores cualesquiera de y' . Si $E \leq 0$, se tendrá máximo y, si $E \geq 0$, se tendrá mínimo.

OBSERVACIÓN. La condición de Weierstrass es necesaria para que exista el extremo en el sentido siguiente: si para ciertos valores de y' la función E tiene signos opuestos en los puntos de la extremal, no se alcanza el extremo fuerte; si esto ocurre para cualesquiera valores de y' por próximos que sean a p , tampoco se alcanza el extremo débil.

2º. Condiciones suficientes de Legendre. Supongamos que la derivada parcial $F_{y'y'}(x, y, y')$ de la función $F(x, y, y')$ es continua y que la extremal C está incluida en un campo de extremales.

Si en la extremal C se tiene $F_{y'y'} > 0$, en la curva C se alcanza mínimo débil; si en la extremal C se tiene $F_{y'y'} < 0$, en ella se alcanza el máximo débil de la funcional (1). Estas condiciones se llaman *condiciones reforzadas de Legendre*.

En el caso en que $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$ en todos los puntos (x, y) próximos a la extremal C y para cualesquiera valores de y' , se tiene mínimo fuerte y en el caso en que $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ para estos valores de los argumentos, se tiene máximo fuerte.

3º. Figuratriz. Sea dada la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx.$$

Tomando x e y como parámetros, consideremos la función $y = F(x, y, y')$ en tanto que función del argumento y' . El gráfico de esta función en el plano de las variables (y', Y) se denomina *figuratriz*.

Es fácil probar que la función de Weierstrass $E(x, y, p, y')$ representa la diferencia entre las ordenadas de la figuratriz y las ordenadas de la tangente a la figuratriz trazada por el punto abscisa $y' = p$. Si la función de Weierstrass conserva su signo para ciertos valores de y' , ello significa que la figuratriz está por encima o por debajo de la tangente para esos valores de y' .

En este caso hay mínimo débil. Si la figuratriz está a un lado de la tangente para todo los valores de y' y para los valores de los parámetros x e y próximos a los puntos de la extremal, hay extremo fuerte.

La condición suficiente de Legendre se expresa en estos términos así: *si para todos los puntos (x, y) próximos a la extremal la figuratriz es cóncava hacia las Y positivas o negativas, hay extremo fuerte.*

5.3.1 Extremo condicionado

1º. Problema isoperimétrico. Sean $F(x, y, y')$ y $G(x, y, y')$ dos funciones.

El problema isoperimétrico consiste en lo siguiente: entre todas las curvas $y = y(x) \in C_1[x_0, x_1]$ a lo largo de las cuales la funcional

$$K[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx$$

tiene un valor fijo l hallar la curva en la que la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

alcanza su valor extremo

Suponemos que las funciones F y G tienen derivadas parciales continuas de primer y de segundo órdenes para $x_0 \leq x \leq x_1$ y para valores cualesquiera de las variables y e y' .

TEOREMA DE EULER. *Si la curva $y = y(x)$ realiza el extremo de la funcional*

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

con las condiciones

$$K[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = l, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1,$$

y si $y = y(x)$ no es extremal de la funcional K existe una constante λ tal que la curva $y = y(x)$ es extremal de la funcional

$$L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')] dx.$$

5.3.2 Problemas variacionales con fronteras móviles

1º. Problema elemental con fronteras móviles. Sea $F = F(x, y, y')$ una función diferenciable tres veces respecto a sus argumentos y sean

$$y = \varphi(x) \quad e \quad y = \psi(x) \quad (1)$$

donde $\varphi(x) \in C_1[a, b]$ y $\psi(x) \in C_1[a, b]$, dos curvas en el plano xOy . Consideremos la funcional

$$J[y(x)] = \int_{\gamma} F(x, y, y') dx \quad (2)$$

definida para las curvas suaves $y = y(x)$ cuyos extremos $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ se encuentran en las curvas (1) de modo que $y_0 = \varphi(x_0)$ e $y_1 = \psi(x_1)$.

TEOREMA. *supongamos que en la curva $\gamma_0 : y = \tilde{y}(x)$ se alcanza el extremo de la funcional*

$$J[y(x)] = \int_{\gamma} F(x, y, y') dx$$

entre todas las curvas de la clase C_1 que unen dos puntos arbitrarios de dos curvas fijas $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$. Entonces la curva γ_0 se cumplen las condiciones de transversalidad

$$\left. [F + (\varphi' - \tilde{y}')F_y] \right|_{x=x_0} = 0, \quad \left. \vphantom{[F + (\varphi' - \tilde{y}')F_y]} \right\} \quad (3)$$

Es decir, para resolver el problema elemental con fronteras móviles es preciso:

1) Escribir y resolver la ecuación de Euler correspondiente.

Como resultado, se obtiene una familia de extremales $y = f(x, c_1, c_2)$, que depende de dos parámetros C_1 y C_2 .

2) Determinar las constantes C_1, C_2, x_0 , y x_1 de las condiciones de trnasversalidad (3) y de las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} f(x_0, C_1, C_2) &= \varphi(x_0), \\ f(x_1, C_1, C_2) &= \psi(x_1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3) Calcular el extremo de la funcional (2).

5.3.3 Problemas discontinuos. Variaciones unilaterales

1º. Problemas discontinuos. La extremal $y = y(x)$ de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (1)$$

es una función que tiene dos derivadas continuas siempre que la derivada $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x))$ sea diferente de cero. Sin embargo, existen problemas variacionales en los cuales el extremo se alcanza en una curva suave a trozos solamente.

2º. Variaciones unilaterales. Se pide hallar el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx;$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2;$$

con la condición

$$y - \varphi(x) \geq 0 \quad (y - \varphi(x) \leq 0) \quad (2)$$

(las condiciones de limitación puede ser de forma más compleja).

En este caso la extremal buscada puede estar formada por trozos de extremales que pertenecen al recinto (2) y por trozos de la frontera $y = \varphi(x)$ de este recinto. En los puntos de unión de estos trozos la extremal buscada puede ser suave y también puede tener puntos angulares. La condición en el punto de unión tiene la forma

$$[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') - (\varphi' - y')F_y'(x, y, y')]|_{x=\bar{x}} = 0.$$

Si $F_{y'y'} \neq 0$, la extremal es tangente en el punto de unión $M(\bar{x}, \bar{y})$ a la frontera $y = \varphi(x)$ del recinto.

5.3.4 Teoría de Hamilton-Jacobi. Principios variacionales de la Mecánica

1º. Forma canónica (Hamiltoniana) de las ecuaciones de Euler.

Las ecuaciones de Euler para la funcional

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx \quad (1)$$

tiene la forma

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

En el caso en el que el determinante

$$\begin{vmatrix} F_{y'_1 y'_1} & F_{y'_2 y'_2} & \cdots & F_{y'_1 y'_n} \\ F_{y'_2 y'_1} & F_{y'_2 y'_2} & \cdots & F_{y'_2 y'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{y'_n y'_1} & F_{y'_n y'_2} & \cdots & F_{y'_n y'_n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3)$$

pondremos

$$F_{y'_k} = p_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

De las ecuaciones (4) se puede expresar y'_k en términos de $x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$:

$$y_k = \varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n).$$

La función H de las variables $x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ definida mediante la igualdad

$$H = [-F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) + \sum_{k=1}^n y'_k F_{y'_k}((x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n))]_{y'_k = \varphi_k},$$

se denomina *hamiltoniano de la funcional* (1).

El hamiltoniano satisface las relaciones siguientes

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{dy_k}{dx}, \quad \frac{\partial H}{\partial y_k} = -\frac{dp_k}{dx} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Se dice que las ecuaciones (5) son el *sistema canónico* o *hamiltoniano de las ecuaciones de Euler* (2); las variables $y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ llevan el nombre de *variables canónicas*.

2º. Ecuación de Hamilton -Jacobi. Teorema de Jacobi. El sistema canónico (5) de las ecuaciones de Euler es el sistema de ecuaciones de Euler para la funcional

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{k=1}^n p_k y'_k - H(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) \right] dx$$

si $y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ se consideran en tanto que funciones incógnitas de x . Esta funcional J es la solución de la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial W}{\partial x} + H\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{\partial W}{\partial y_1}, \frac{\partial W}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial y_n}\right) = 0,$$

que se denomina *ecuación de Hamilton - Jacobi*.

TEOREMA DE JACOBI. *Supongamos que W es la integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi y satisface la condición*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial C_n} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial C_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial y_n \partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

entonces las igualdades

$$\frac{\partial W}{\partial C_k} = B_k, \quad \frac{\partial W}{\partial y_k} = P_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

donde C_k y B_k son unas constantes arbitrarias, determinan una solución del sistema canónico (5) dependiente de $2n$ constantes arbitrarias.

3º. Principios variacionales de la Mecánica.

a) **PRINCIPIO DE HAMILTON-OSTROGRADSKI.** Supongamos que se tiene un sistema de n puntos materiales $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) con masas respectivas m_k ($k = 1, 2, \dots, n$). supongamos que el movimiento del sistema está sometido a enlaces

$$\varphi_j(x, y, z, t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m; m \leq n \quad (6)$$

y se realiza bajo la acción de las fuerzas $F_k(X_k, Y_k, Z_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) que tiene el potencial (función de fuerza) $U = U(x_k, y_k, z_k, t)$:

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}.$$

La energía cinética de este sistema será igual a

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

Supongamos que este sistema pasa de cierto estado A correspondiente al momento del tiempo $t = t_0$ a otro estado B correspondiente al momento de tiempo $t = t_1$. Entre todos los desplazamientos posibles del sistema de A a B se escoje la clase de movimientos admisibles que concuerdan con los enlaces dados y que hacen pasar el sistema del estado A al estado B en el intervalo de tiempo dado $[t_0, t_1]$.

El principio de Hamilton-Ostrogradski consiste en lo siguiente:
entre todos los movimientos admisibles que hacen pasar el sistema del estado A al estado B , el movimiento real se caracteriza por el cumplimiento de la condición necesaria $\delta J = 0$ de extremo de la funcional

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt. \quad (7)$$

A cada movimiento admisible del sistema le corresponden $3n$ funciones $x_k(t), y_k(t), z_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) que están definidas en el intervalo $[t_0, t_1]$, que satisfacen las ecuaciones (6) y que toman determinados valores en los extremos del intervalo $[t_0, t_1]$. Por consiguiente fijas. Para resolver este problema formamos la función auxiliar de Lagrange

$$F = T + U + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \varphi_j$$

y escribimos para ella el sistema de ecuaciones de Euler-Ostrogradski:

$$\left. \begin{aligned} m_k \ddot{x}_k - X_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} &= 0, \\ m_k \ddot{y}_k - Y_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} &= 0, \\ m_k \ddot{z}_k - Z_k - \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

El sistema (8) coincide con las ecuaciones diferenciales del movimiento real del sistema.

b) PRINCIPIO DE LA ACCIÓN MÍNIMA EN LA FORMA DE LAGRANGE.

Supongamos que los enlaces φ_j y el potencial U no dependen del tiempo t . En este caso tiene lugar la integral de energía $T - U = h = \text{const.}$ La integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} T dt$$

se denomina acción. De la integral (7) se deduce que

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt - \int_{t_0}^{t_1} h dt$$

El principio de la acción mínima en la forma de Lagrange consiste en los siguiente: *para el movimiento real, la integral de la acción debe tomar su valor mínimo, o sea,*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} T dt =$$

mín. El principio de la acción mínima puede ser representado en la forma de Jacobi

$$\int_{\gamma} \sqrt{2(U + h)} ds =$$

mín (ds es la diferencial del arco γ) en la que no interviene el tiempo.

OBSERVACIÓN 1. Aquí se consideran admisibles los movimientos que satisfacen las ecuaciones de enlace $\varphi_j(x, y, z) = 0 (j = 1, 2, \dots, m)$ y la ecuación $T - U = h$ con el mismo valor de h que para el movimiento real y que tienen los estados iniciales y finales fijos, siendo también fijo el momento inicial t_0 del tiempo. El momento final del tiempo no se fija para estos movimientos.

OBSERVACIÓN 2. La energía potencial figura no en la integral sino en la condición complementaria $T - U = h$. Formamos la función auxiliar de Lagrange

$$F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}(U + h) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j.$$

Después escribimos las ecuaciones de Euler-Ostrogradski para nuestro problema

$$m_k \ddot{x}_k = \frac{\partial U}{\partial x_k} + 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k},$$

$$m_k \ddot{y}_k = \frac{\partial U}{\partial y_k} + 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k},$$

$$m_k \ddot{z}_k = \frac{\partial U}{\partial z_k} + 2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}$$

que representan las ecuaciones del movimiento real.

5.3.5 Método de diferencias finitas de Euler

Consideremos el problema variacional elemental: hallar el extremo de la funcional

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx; \quad y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (1)$$

Según el método de Euler, los valores de la funcional (1) se toman no en la curvas arbitrarias que admite este problema variacional, sino en las quebradas compuestas por un número dado n de segmentos rectilíneos cuyos vértices tienen abscisas fijas

$$a + \Delta x, \quad a + 2\Delta x, \dots, a + (n-1)\Delta x, \quad \text{donde} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

En estas quebradas la funcional $J[y(x)]$ se convierte en una función $\phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ de las ordenadas y_1, y_2, \dots, y_{n-1} de los vértices de la quebrada. Las ordenadas y_1, y_2, \dots, y_{n-1} se escogen de modo que la función $\phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ tenga extremo, o sea, se determinan del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} = 0.$$

La quebrada así obtenida es la solución aproximada del problema variacional (1).

5.3.6 Método de Ritz. Método de Kantoróvich

1º. Método de Ritz. La idea del método consiste en que al hallar el extremo de la funcional $J[y(x)]$ se consideran, en lugar del espacio de las funciones admisibles, sólo las funciones que

se pueden representar como combinaciones lineales de las funciones admisibles:

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x), \quad (1)$$

donde α_i son unas constantes y el sistema $\varphi_i(x)$, llamado *sistema de funciones coordenadas*, está formado por funciones $\varphi_i(x)$ que son linealmente independientes y que constituyen un sistema completo de funciones en el espacio considerado.

Hablando en términos generales, cuando pedimos que las funciones $y_n(x)$ sean admisibles, imponemos a las funciones coordenadas $\varphi_i(x)$ ciertas condiciones complementarias.

2º. Método de Kantorovich. Este método ocupa una posición intermedia entre la resolución exacta y el método de Ritz y se aplica para analizar el extremo de las funcionales

$$J[z(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (2)$$

que dependen de funciones de varias variables independientes ($n \geq 2$).

Igual que en el método de Ritz, escogemos un sistema $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de funciones coordenadas y buscamos la solución aproximada en la forma

$$z_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x_j) \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

pero considerando los coeficientes $\alpha_k(x_j)$ como funciones incógnitas de una de las variables independientes.

En las funciones (3) la funcional (2) se convierte en una funcional $\tilde{J}[\alpha_1(x_j), \alpha_2(x_j), \dots, \alpha_m(x_j)]$ que depende de m funciones $\alpha_1(x_j), \alpha_2(x_j), \dots, \alpha_m(x_j)$. Estas funciones se escogen de modo que la funcional \tilde{J} alcance el extremo y se determinan de las condiciones necesarias de extremo para la funcional \tilde{J} .

Empleando el método de Kantorovich, se obtiene una solución aproximada, como regla, más exacta que la solución que da el método de Ritz con las mismas funciones coordenadas $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y con el mismo número m de términos en la aproximación.

5.3.7 Métodos variacionales para la determinación de los valores y de las funciones propios

La ecuación de Sturm-Liouville

$$-\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = \lambda y, \quad (1)$$

donde $p(x) > 0$ tiene derivada continua y $q(x)$ es continua, con las condiciones

$$y(a) = 0 \quad e \quad y(b) = 0 \quad (2)$$

tiene la solución nula (trivial) $y \equiv 0$ cualquiera que sea el valor real o complejo de λ .

El conjunto de la ecuación (1) y de las condiciones de frontera (2) se denomina *problema de contorno de Sturm-Liouville* (1)-(2).

Los valores de λ para los cuales el problema de contorno (1)-(2) tiene soluciones no triviales $y \equiv 0$ se denominan *valores propios* y las funciones mismas llevan el nombre de *funciones propias del problema de contorno*.

Capítulo 6

Conclusiones

Con este trabajo se pretende poner en manifiesto que la teoría de sobre bifurcaciones locales es una herramienta relevante en la comprensión de los sistemas dinámicos aplicados a distintos campos de la ciencia y en particular en la ingeniería, ya que permite profundizar en propiedades cualitativas de los equilibrios y órbitas del sistema y por otra parte, establecer las fronteras paramétricas, a partir de las cuales se producen cambios estructurales.

El análisis de estabilidad de los sistemas no lineales es un problema mucho más complejo que el problema de los sistemas lineales. El comportamiento puede ser tan diverso que existen múltiples definiciones de estabilidad, incluso cuando nos referimos exclusivamente a estabilidad de puntos de equilibrio. La teoría de Lyapunov proporciona un marco general que permite verificar si un equilibrio es estable según varias de sus definiciones.

El teorema de Poincaré-Bendixson también es uno de los resultados más importantes para el análisis de sistemas no lineales, ya que en esencia explica las posibilidades en el plano de fase, de un sistema bidimensional, son muy limitadas.

Si una trayectoria está contenida en una región cerrada y limitada que no contiene puntos fijos, entonces la trayectoria debe aproximarse a una órbita cerrada, pero este teorema no es aplicable para sistemas de tridimensionales o de mayor dimensión, debido a que las órbitas se mueven sin un patrón fijo de forma indefinida en una región limitada sin converger en un punto fijo o en una órbita cerrada.

Capítulo 7

Referencias

- [1] E. Freire. “Análisis cualitativo y de bifurcaciones en sistemas dinámicos”. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla. Sevilla, España, 1982.
- [2] JUNG, Ch. “Poincaré map for scattering states”. Journal of physics A: mathematical and general, 1986, vol. 19, no 8, p. 1345.
- [3] Bogoiavlenskii, Oleg Igorevich. “Methods of the qualitative theory of dynamic systems in astrophysics and gas dynamics”. Moscow Izdatel Nauka, 1980.
- [4] Tan, K. Xu, H. K. (1993). “Approximating fixed points of non-expansive mappings by the Ishikawa iteration process”. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 178, 301-301.
- [5] Walter Ritter Ortíz y Tahimi E Perez Espino (2012). “Sistemas dinámicos no-lineales”. Disponible en Línea: <http://rcci.net/globalizacion/2012/fg1312.htm>
- [6] Axelby, G. S. y P. C. Parks (1992). Lyapunov centenary. Automatica 28(5), 863 – 864.
- [7] Isidori, A. (1999). Nonlinear control systems II . Communications and control engineering series. Springer-Verlag.
- [8] Lyapunov, A. M. El problema general de la estabilidad del movimiento. PhD thesis. Kharkov Mathematical Society.
- [9] H. S, Strogatz. ”Nonlinear Dynamics And Chaos: with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering ” perseus publishing, Capitulo 2, 3, y 4.